О.М. Афанасьєва
Я.С. Бродський
О.Л. Павлов
А.К. Сліпенко

МАТЕМАТИКА

10 клас

Підручник для рівня стандарту

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я72
74.262.21
А94

Наукову експертизу проводив Інститут математики НАН України.
Психолого-педагогічну експертизу проводив Інститут педагогіки НАПН України.

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України №177 від 03.03.2010 р.)

Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К.
А94 Математика. 10 клас: Підручник для рівня стандарту. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2010. — 480 с.

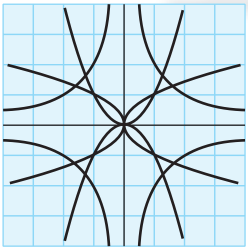
ISBN 978-966-10-1272-0

Пропонований підручник відповідає програмі з математики для 10-го класу рівня стандарту, рекомендований Міністерством освіти і науки України й передбачає готовність учнів до широкого і свідомого застосування математики. Цю орієнтацію забезпечують зміст курсу, характер викладення навчального матеріалу, добір ілюстрацій і приклади застосувань, система вправ і контрольних запитань.

Для учнів і вчителів загальноосвітніх навчальних закладів.

ББК 22.1я72

ISBN 978-966-10-1272-0



! Звернення до читача

Дорогий юний друже!

Перед Вами підручник з предмета «Математика». Його головне призначення — допомогти Вам систематизувати, розширити й поглибити знання і вміння, які необхідні для математичного моделювання і дослідження процесів і явищ за допомогою функцій, рівнянь та інших математичних об'єктів, опанувати суміжними предметами (фізика, хімія, біологія тощо). І тим самим упевнитись у могутності математичних методів для пізнання навколишнього світу, у розв'язанні різних проблем.

Підручник для 10 класу складається з чотирьох розділів. Кожному розділу передує матеріал, що вивчався раніше і необхідний для вивчення цього розділу. Його подано у вигляді таблиць. Для забезпечення готовності до вивчення матеріалу розділу наводиться діагностичний тест.

Розділи підручника поділено на параграфи, які, в свою чергу, розчленовані на пункти. До кожного пункту подано контрольні запитання, що мають забезпечити активне засвоєння основних понять і фактів у їхньому взаємозв'язку.

Викладення навчального матеріалу у кожному пункті структуроване за рівнями. На першому рівні (його позначено літерою **Б**) викладаються найголовніші поняття, основні факти теми, хоча, найчастіше, без формальних доведень. Цей матеріал є базою для подальшого вивчення теми, більш ґрунтовного і повного.

На другому рівні (його позначено літерою **О**) наводиться більш повне обґрунтування попереднього матеріалу, його розширення, наводяться приклади його застосування. Матеріал на цих двох рівнях повністю забезпечує оволодіння предметом згідно з вимогами програми на рівні стандарту.

Виклад теоретичного матеріалу супроводжується розв'язанням типових задач відповідного рівня. Початок і кінець доведень тверджень та розв'язань прикладів позначено знаками □ і ■.

Система задач, вправ і контрольних запитань, наведених у підручнику, має три рівні складності: перший рівень складності позначено символом «°», другий не має позначень, третій позначено символом «*».

До загальної системи задач включено вправи на повторення, що мають сприяти готовності опанування наступним матеріалом, збереженню вмінь і навичок, сформованих при вивченні попередніх розділів.

Кожний розділ завершується матеріалом для підготовки до тематичного оцінювання, який складається із запитань для самоконтролю (з відповідями) та зразка тематичної контрольної роботи. Для повторення і систематизації навчального матеріалу розділу наведено відповідні таблиці.

Підручник містить вказівки і відповіді до задач, а також предметний покажчик.

Читання книги не є легкою справою. Деякі фрагменти доведень залишені для самостійного опрацювання. Не минайте їх!

Щиро бажаємо успіхів!

Колектив авторів

Позначення для орієнтування в навчальному матеріалі

Б, О — дві сходинки засвоєння навчального матеріалу

! — зверніть увагу

□ — початок розв'язання задачі, доведення теореми

■ — кінець розв'язання задачі, доведення теореми

° — задачі першого рівня складності

* — задачі третього рівня складності

✓ — контрольні запитання

— графічні вправи; задачі

— вправи для повторення

? — завдання для самоконтролю

— тест для діагностики

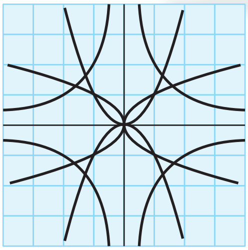
— межі для різних типів задач

$\exists$ — існує об'єкт

$\exists!$ — існує єдиний об'єкт

$\Rightarrow$ — знак логічного слідування: якщо ..., то

$\Leftrightarrow$ — рівносильність: тоді і тільки тоді



! Вступ

Розвиток суспільства і математика

Однією з характерних особливостей нашого часу є широке застосування математики у різних галузях діяльності людини. Без математики не обійтися при проектуванні та будівництві споруд, виробництві приладів та їхніх деталей, важливу роль відіграє ця наука у плануванні господарчої діяльності, керуванні технологічними процесами, роботою підприємств тощо.

Суттєве прискорення процесу математизації науки, техніки, господарської діяльності розпочалося в середині XX ст. Воно пов'язане зі створенням електронно-обчислювальних машин, автоматизацією процесів виробництва, новітніми технологіями, істотними змінами у характері праці людини.

Математика стала універсальним засобом моделювання та дослідження навколишнього світу, надійним знаряддям розв'язування практичних задач. Тому вивчення математики, її застосувань є невід'ємною складовою формування світогляду людини та підготовки сучасного фахівця — кваліфікованого робітника, техніка, інженера, економіста тощо.

Практика — основне джерело розвитку математики

Очевидно, математика виникла на ранній стадії розвитку людства під впливом потреб практики. Розвиток ремесла, землеробства, торгівлі й обміну, навігації, управління державою потребував удосконалення вимірювань і розрахунків.

Неможливо точно відповісти на питання, коли саме було сформовано перші математичні поняття. Однак є переконливі писемні свідчення (папіруси, глиняні таблички), які підтверджують високий рівень математичних знань у могутніх цивілізацій Стародавнього Сходу — Єгипті та Вавилоні — за три-дві тисячі років до н. е. Тогочасна математика мала яскраво виражений конкретний характер. Її досягнення дійшли до нас у вигляді задач, більшість з яких належить до розряду господарських, і їхніх розв'язків. У них йдеться про вимірювання площ і об'ємів, про підрахунки врожаю і величини податку, про обчислення, пов'язані зі сплатою боргів та ін.

Приблизно у VII ст. до н. е. виникла грецька цивілізація, яка відрізнялась від країн Стародавнього Сходу політичним ладом і економікою. Розквіт науки і мистецтва у Стародавній Греції супроводжувався плідними теоретичними дослідженнями. Намагання стародавніх греків зрозуміти будову Всесвіту, визначити роль і місце людини у природі та суспільстві привели до утвердження нових форм раціонального мислення. У математиці ця форма мислення виявлялась у прагненні довести всі твердження, виходячи з невеликої кількості початкових тверджень. До тих часів математика мала «рецептурний» характер. Тож обґрунтування узвичаєних практичних «рецептів» стало одним з основних завдань грецьких математиків. Уже в III ст. до н. е. Евклід створив книгу «Начала», в якій у дедуктивній формі виклав основи тогочасної математики. Упродовж двох тисячоліть «Начала» Евкліда вважалися взірцем строгості й істотно впливали на розвиток математики. Втім, аксіоматичний метод, за допомогою якого Евклід виклав основи геометрії, є загальновизнаним при побудові наук, і не тільки математичних.

У Стародавній Греції були зроблені відкриття, які на багато століть визначили напрямки розвитку математики. Поряд із досягненнями теоретичного характеру тогочасні вчені мали багато суто практичних здобутків. Найвидатнішим представником прикладної математики того часу історики вважають Архімеда (приблизно 287–212 рр. до н. е.). Він був не тільки математиком, а й талановитим інженером. Його праці з обчислення площ і об'ємів стали передвісниками найпотужніших сучасних методів математики.

Останній період розвитку античного суспільства пов'язаний із впливом Римської імперії, де, на відміну від Греції, математикою цікавились мало. Після прийняття християнства у V ст. н.е. римський імператор Юстиніан навіть заборонив заняття математикою під загрозою смерті.

Після занепаду Римської імперії центр математичних досліджень перемістився на Схід. Найбільш значними досягненнями середньовічної математики є запровадження в Індії сучасної десяткової позиційної системи запису чисел, введення від'ємних чисел і нуля, створення арабськими математиками (аль-Караджі, аль-Біруні, аль-Хайамі та ін.) основ алгебри, яка згодом виділилась у самостійний розділ математики. Математичні дослідження на Сході мали арифметико-алгебраїчний характер і були більш прикладними, ніж за часи античності. Арабські математики істотно розвинули тригонометрію з огляду на необхідність астрономічних досліджень та потреб навігації.

У той час, як Схід продовжував розвиватись, Західна Європа поступово занепадала. Феодальні чвари, низький рівень культури і виробництва аж ніяк не сприяли розвитку науки. Вивчення математики в культурних центрах того часу — монастирях — обмежувалось студіюванням арифметики.

На початку XII ст. економічне життя Заходу активізується, встановлюються торговельні зв'язки зі Сходом. Через арабів Європа знайомиться з працями грецьких вчених, в європейських країнах пожвавлюється інтерес до математики.

Кінець середньовіччя (XV-XVI ст.) у Західній Європі характеризується бурхливими змінами, пов'язаними з розпадом феодального суспільства і формуванням ринкових відносин. Розвиток промисловості, торгівлі, мореплавства, друкарської справи привів до розквіту культури, мистецтва і науки. Математика стає важливим засобом наукового Відродження. В процесі активних занять нею вчені створили сучасну алгебраїчну символіку.

Уже в епоху Відродження почалося використання різних машин і механізмів на мануфактурах, у будівництві, гірничій справі тощо. Відтак з'явилися передумови для розвитку теоретичної механіки та вивчення механічного руху. Вчені мусили подбати про створення відповідного математичного апарату. На початку XVII ст. Рене Декарт (1596 – 1650) ввів у науковий обіг поняття змінної величини. Відтоді основним об'єктом математики стало поняття функції. Зусиллями Ньютона, Лейбніца, їхніх учнів і послідовників для вивчення функціональної залежності було розроблено новий математичний апарат. Його застосування при розв'язуванні задач механіки, астрономії та інших наук надовго визначило подальші шляхи розвитку математики.

Розвиток ринкових відносин у XVIII і XIX століттях супроводжувався перебудовою виробництва з застосуванням парових машин, інших технічних засобів. Розвиток математики у той час був тісно пов'язаний з технічною революцією, вимогами практики. Створення геометричних теорій, розвиток поняття про число, вивчення функцій стимулювалися необхідністю вирішення науково-технічних проблем в царині кораблебудівництва і мореплавства, балістики, гідротехніки, геодезії і картографії, астрономії.

З часом безпосередній вплив практики на розвиток математики дещо зменшувався. Однак становлення різних природничих і технічних наук, передусім – фізики, було тісно пов'язане з удосконаленням математичних методів, розширенням сфери їхнього застосування.

Таким чином, зв'язок математики з практикою найчастіше здійснюється через природничі і технічні науки.

Важливим джерелом розвитку математики є її внутрішні потреби, спрямовані на систематизацію теорій, їхнє узагальнення, вдосконалення наукових методів і т.ін.

Розвиток математики в XIX ст. визначався як її внутрішніми потребами, так і потребами практики. Яскраві результати були одержані і на тому, і на іншому шляху. Нерідко абстрактні математичні теорії з часом ставали прикладними. Так, наприклад, неевклідова геометрія, творцями якої були німець К. Ф. Гаусс (1777 – 1855), угорець Я. Больяй (1802 – 1860) та росіянин М. І. Лобачевський (1792 – 1856), постала на ґрунті намагань удосконалити «Начала» Евкліда. На початку XX ст. це відкриття стало невід'ємною частиною сучасних фізичних теорій.

Ще більшу роль у вивченні навколишнього світу та у суспільстві загалом відіграє математика в XX ст. Її можливості істотно зросли внаслідок створення електронно-обчислювальних машин. Сучасний етап розвитку суспільства характеризується значним ростом сфер застосування математики.

Чим же пояснюється розмаїття застосувань математики й універсальність її методів? По-перше, математика послуговується досить загальними і чіткими об'єктами для описання навколишніх явищ (геометричні фігури, числа, рівняння, вектори і т. д.).

А, по-друге, вченими розроблено низку потужних методів дослідження математичних об'єктів: метод координат, алгебраїчні методи, методи математичного аналізу й ін.

Таким чином, математика є зручним і ефективним засобом для описання і дослідження закономірностей реальності.

Математичне моделювання

Застосування математики для описання і дослідження процесів та явищ дійсності ставить нас перед необхідністю знайти відповідь на питання: «А в чому полягає сутність розв'язання прикладної задачі за допомогою математики?». Власне, про це ми і поговоримо.

Усім вам доводилось застосовувати математичні знання для розрахунку швидкості заповнення басейну, часу виконання роботи та ін. Ці застосування передбачають заміну реальних об'єктів і відношень між ними математичними об'єктами і відношеннями між ними (функціями, рівняннями, геометричними фігурами).

Для цього необхідно передусім виділити суттєві характеристики реальних об'єктів і відношень між ними, проігнорувавши несуттєві, а тоді — саме їх замінити математичними об'єктами і зв'язками між ними. Процес такого заміщення називають ***математичним моделюванням***.

Математичними моделями звичайно називають наближені описання якогось класу явищ зовнішнього світу, виражені за допомогою математичних понять і відношень між ними.

Розглянемо задачу, яка ілюструє застосування методу математичного моделювання на практиці.

По один бік від шосе знаходяться два населених пункти. Де варто збудувати автобусну зупинку?

Розв'язання цієї задачі починається із з'ясування того, чим визначається вибір місця для побудови зупинки. Якщо немає ніяких обмежень, то природно шосе зобразити прямою l, населені пункти — точками A і B (рис. 1). Залишилось з'ясувати критерій, за яким вибирається місце для зупинки, яке будемо зображати точкою C на прямій l. Якщо не враховувати чисельності населення в пунктах A і B, то зупинка повинна бути розміщеною так, щоб сума відстаней від пунктів A і B до зупинки C була найменшою. Тоді витрати часу на шлях до зупинки будуть найменшими. Таким чином, математичною моделлю даного завдання буде така математична задача.

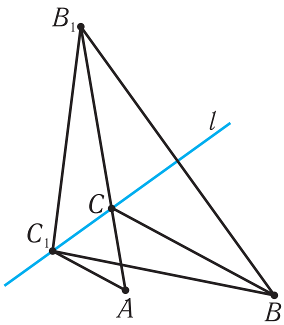


Рис. 1

Нехай дано дві точки A і B по один бік від прямої l. Знайти на прямій таку точку C, щоб сума відстаней від A до C і від B до C була найменшою.

Ця задача міститься у багатьох посібниках з геометрії. Вважають, що її автором є відомий математик античності Герон Александрійський. Тому цю задачу називають задачею Герона. Її розв'язання ґрунтується на ідеї симетрії.

Побудуємо точку B_1, симетричну точці B відносно прямої l. З'єднаємо точки B_1 і A. Тоді точка перетину прямої AB_1 з прямою l буде шуканою. Зверніть увагу на те, що ця точка існує!

Дійсно, для довільної точки C_1, яка відрізняється від C, має місце нерівність

$$AC_1 + C_1B = AC_1 + C_1B_1 > AB_1 = AC + CB_1 = AC + CB.$$

Для її доведення ми скористались властивостями симетрії, з яких випливають рівності $C_1B = C_1B_1,\ CB = CB_1$, а також нерівністю трикутника. Отримана нерівність свідчить про те, що точка C є шуканою.

Нам залишилось з'ясувати, в якій мірі розв'язок математичної задачі, яка є моделлю даної задачі, є її розв'язком. Для цього слід уточнити декілька питань. Чи можна реалізувати розв'язок практично? Якщо відстані незначні, то за допомогою топографічних приладів це зробити неважко. У тому випадку, коли це неможливо зробити, слід продовжити дослідження математичної задачі і навчитись характеризувати точку C іншими засобами.

Але ще важливішими і складнішими є уточнення розв'язку в зв'язку з тим, що чисельність населення в пунктах A і B різна. Врахування цього фактора значно ускладнює задачу. Ще складнішою стає ситуація, якщо враховувати й інші природні умови, наприклад, коли навпростець іти неможливо. Врахування всіх факторів майже неможливе у загальному випадку. Але за конкретних умов математик завжди побудує математичну модель для цієї задачі і запропонує придатний варіант її розв'язання.

Підбиваючи підсумки, можна стверджувати, що процес математичного моделювання загалом складається з трьох етапів:

1) ***вибір чи побудова математичної моделі для описання даної задачі;***

2) ***дослідження побудованої моделі, тобто розв'язування математичної задачі;***

3) ***тлумачення результатів дослідження, встановлення відповідності одержаного результату цілям досліджень.***

При необхідності уточнюється сама математична модель і результати, які з неї випливають.

Побудова математичної моделі ґрунтується на абстрагуванні від усіх властивостей об'єкта пізнання, крім кількісних і просторових. При побудові математичної моделі завжди виникає необхідність нехтувати тими чи іншими сторонами реальності. Про якість побудованої моделі можна судити лише за результатами порівняння дійсності з інформацією, отриманою шляхом дослідження моделі. Таким чином, метод математичного моделювання виходить з практики, створюючи математичні моделі явищ і процесів, і повертається до неї, щоб обґрунтувати доцільність створення моделі.

Підсумок

Основою застосування математики, як уже зазначалось, є процес математичного моделювання. До цієї діяльності Ви готувались, вивчаючи курс математики в основній школі. Там створювався запас математичних моделей, формувались навички їхньої побудови та дослідження.

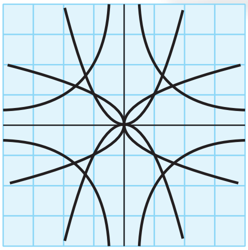
У даному курсі передбачається систематизація, поглиблення і розширення знань, одержаних в основній школі, а також удосконалення навичок моделювання. Для моделювання реальних об'єктів і відношень, з якими Ви матимете справу при вивченні інших дисциплін, в майбутній професійній діяльності, необхідно суттєво розширити засоби математичного моделювання і дослідження математичних моделей, за рахунок уведення нових класів функцій та математичних методів. Дана книга допоможе Вам у досягненні цих цілей.

Розділ 1.

ФУНКЦІЇ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

Кожній людині постійно доводиться мати справу з різними залежностями між величинами. У відповідності з цим вивчення залежностей є основним змістом її навчання в школі, а також у вищому навчальному закладі. Щоб переконатись у цьому, досить погортати сторінки підручників з фізики, хімії, технічних чи суспільних дисциплін, науково-популярних журналів та інших видань. Із закінченням навчання не зникає потреба враховувати, розглядати і досліджувати різні залежності. Для будівельників важливою є залежність вартості будівництва від його тривалості, залежність якості виконаних робіт від якості будівельних матеріалів. Для підприємств автомобільного транспорту викликає інтерес залежність витрат палива від якості доріг. Перелік таких прикладів із господарства, побуту, політики тощо можна продовжити.

Починаючи з XVII ст. вивчення найважливіших типів залежностей стало основним завданням математики. В математику міцно увійшли поняття змінної величини та функції, які стали і залишаються до цього часу потужними засобами моделювання реальних процесів, а тому й одними з головних об’єктів дослідження. У даному розділі закладено основи для вивчення функціональних залежностей між змінними величинами, виділено деякі найважливіші класи функцій, вивчаються елементарні методи дослідження функцій, а також продовжується вивчення однієї з найбільш застосовних функцій — степеневої.



Готуємось до вивчення теми «Функції, їхні властивості та графіки»

Вивчення теми «Функції, їхні властивості та графіки» базується практично на усьому алгебраїчному матеріалі, який вивчався в попередніх класах. Головне призначення цієї теми якраз і полягає у його повторенні, систематизації і поглибленні. Тому для підготовки до вивчення теми наведено найважливіший матеріал у вигляді таблиць.

Числа та обчислення

Таблиця 1

Тема	Зміст	Приклади
Звичайні дроби	Додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками: $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$; $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$. Щоб додати або відняти дроби з різними знаменниками, їх спочатку зводять до спільного знаменника, а потім виконують дію за правилом додавання або віднімання дробів з однаковими знаменниками. Множення: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. Ділення: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.	$\frac{3}{5}+\frac{5}{6}=\frac{18}{30}+\frac{25}{30}=$ $=\frac{43}{30}=1\frac{13}{30}$.

Тема	Зміст
Відсотки і пропорції	$1\% = 0{,}01$. $p\%$ від числа a дорівнюють $\frac{ap}{100}$. Якщо $p\%$ від числа a дорівнюють b, то $a = \frac{b}{p} \cdot 100$. Відсоткове відношення чисел a і b дорівнює $\frac{a}{b} \cdot 100\%$. Головна властивість пропорції $a : b = c : d$ — $ad = bc$.

Вирази та їхні перетворення

Таблиця 2

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b), \qquad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

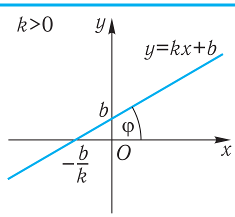
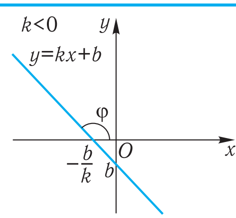
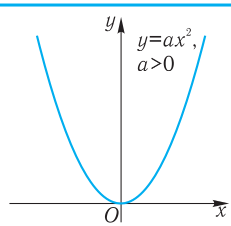
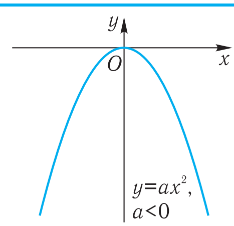
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3, \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$

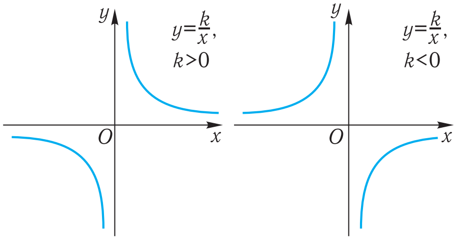
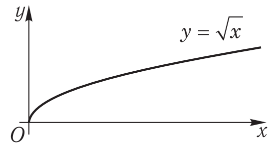
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \qquad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1 і x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Функції і графіки

Таблиця 3

1. ***Лінійна функція*** ***$y = kx + b$.*** Графік — пряма, не паралельна осі y. Коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до осі x: $k = \text{tg}\varphi$.	 
2. ***Квадратична функція $y = ax^2$, $a \neq 0$.*** Графік — парабола, вітки якої спрямовані вгору, якщо $a > 0$, і вниз, якщо $a < 0$.	 

3. ***Обернена пропорційність*** $y=\frac{k}{x}$, $\boldsymbol{k \neq 0}$. Графік — гіпербола, яка при $k>0$ розташована у I і III чвертях, а при $k<0$ — у II і IV чвертях.	
4. *Функція* $y=\sqrt{x}$. Визначена на проміжку $[0; +\infty)$.	

Рівняння

Таблиця 4

Тип рівняння	Розв'язання
Лінійне рівняння $\boldsymbol{ax=b}$	Якщо $a \neq 0$, то $x=\frac{b}{a}$.
	Якщо $a=0$, $b \neq 0$, то рівняння не має коренів.
	Якщо $a=0$, $b=0$, то будь-яке x є коренем рівняння.
Квадратне рівняння $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$, $\boldsymbol{a \neq 0}$, $D=b^2-4ac$ — його дискримінант	Якщо $D<0$, то рівняння не має коренів. Якщо $D=0$, то рівняння має один корінь $x=-\frac{b}{2a}$. Якщо $D>0$, то рівняння має два корені $x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.
Неповне квадратне рівняння (один з коефіцієнтів b або c дорівнює 0)	$ax^2+bx=0$ або $x(ax+b)=0$, тоді $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$. $ax^2+c=0$ або $x^2=-\frac{c}{a}$. Якщо $-\frac{c}{a}>0$, то $x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Якщо $-\frac{c}{a}<0$, то рівняння не має коренів.

Означення степеня з цілим показником

Таблиця 5

Степінь з натуральним показником	$n \in N, n > 1 \Rightarrow a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}.\quad a^1 = a.$
Степінь з нульовим показником	$a^0 = 1,\ a \neq 0.$
Степінь з цілим від'ємним показником	$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0,\ \ n \in N.$

Властивості степеня з цілим показником

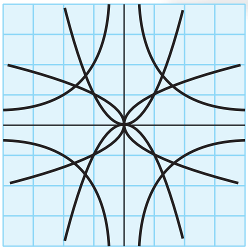
Таблиця 6

Добуток степенів з однаковими основами	$a^x \cdot a^y = a^{x+y},\ x,\ y \in Z.$
Частка від ділення степенів з однаковими основами	$a^x : a^y = a^{x-y},\ x,\ y \in Z.$
Піднесення степеня до степеня	$\left(a^x\right)^y = a^{xy},\ x,\ y \in Z.$
Степінь добутку	$(ab)^x = a^x \cdot b^x,\ x \in Z.$
Степінь частки	$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x},\ x \in Z.$

Арифметичний квадратний корінь та його властивості

Таблиця 7

Означення	$a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \geq 0, \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$
Арифметичний квадратний корінь з добутку	$a \geq 0,\ b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$
Арифметичний квадратний корінь з дробу	$a \geq 0,\ b > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$
Арифметичний квадратний корінь з квадрата	$\sqrt{a^2} = \|a\|.$



Тест для діагностики готовності до вивчення теми «Функції, їхні властивості та графіки»

1. Обчисліть: $\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$.

А. $-\frac{27}{8}$. **Б.** $\frac{8}{27}$. **В.** $-\frac{8}{27}$. **Г.** $\frac{27}{8}$.

2. Порівняйте без обчислювальних засобів числа $a = \frac{4}{5}$ і $b = \frac{5}{6}$.

А. $a < b$. **Б.** $a = b$. **В.** $a > b$.
Г. Порівняти неможливо.

3. Після підвищення цін на 10% ціна товару дорівнювала 220 грн. Якою була початкова ціна цього товару ?

А. 242 грн. **Б.** 200 грн. **В.** 198 грн. **Г.** 180 грн.

4. Обчисліть значення виразу $\frac{x - x^3}{2}$ при $x = -\sqrt{5}$.

А. $-3\sqrt{5}$. **Б.** $-2\sqrt{5}$. **В.** $2\sqrt{5}$. **Г.** $3\sqrt{5}$.

5. Скоротіть дріб $\frac{a-2}{a^2-4}$.

А. $\frac{1}{a+2}$. **Б.** $\frac{1}{a-2}$. **В.** $a - 2$. **Г.** $\frac{1}{2-a}$.

6. Подайте вираз $\left(\frac{a^6}{a^2}\right)^5$ у вигляді степеня числа a.

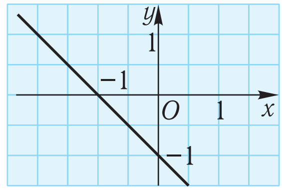
А. a^{15}. **Б.** a^{20}. **В.** a^8. **Г.** a^9.

7. Серед наведених точок укажіть точку, через яку проходить графік функції $y = -\frac{2}{x}$.

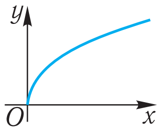
А. $(-1; -2)$. **Б.** $(-1; 2)$. **В.** $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. **Г.** $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

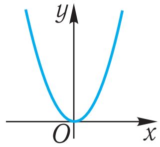
8. На рисунку зображено графік функції …

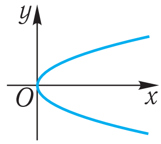
А. $y = x + 1$. **Б.** $y = x - 1$.
В. $y = -x - 1$. **Г.** $y = -x + 1$.

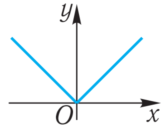


9. Графік функції $y = x^2$ зображено на рисунку …

А.


Б.


В.


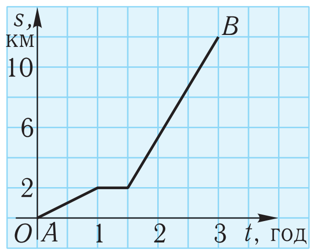
Г.


10. Яка з наведених функцій є оберненою пропорційністю?

А. $y = 2x$. **Б.** $y = x^2$. **В.** $y = \dfrac{2}{x}$. **Г.** $y = \sqrt{x}$.

11. На рисунку представлено графік руху туриста з пункту A в пункт B, де s — відстань від пункту A до туриста у момент часу t. Скільки часу рухався турист до привалу?

А. 2 год. **Б.** 3 год.
В. 1,5 год. **Г.** 1 год.



12. Із формули $s = \dfrac{vt}{2} + 1$ виразіть залежність часу $t > 0$ від шляху s.

А. $t = \dfrac{v}{2s - 2}$. **Б.** $t = \dfrac{2s - 2}{v}$. **В.** $t = \dfrac{2s + 2}{v}$. **Г.** $t = \dfrac{2s - 1}{v}$.

13. Скільки коренів має рівняння $3x^2 - 5x + 2 = 0$?

А. Жодного. **Б.** Один. **В.** Два. **Г.** Більше від двох.

14. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 2x + 1 \ge 0, \\ 1 - x > 0. \end{cases}$

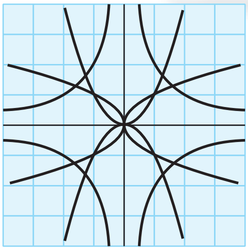
А. $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right)$. **Б.** $\left[-\dfrac{1}{2}; 1\right)$. **В.** $\left(-1; \dfrac{1}{2}\right]$. **Г.** $(1; +\infty)$.

15. Знайдіть область визначення виразу $\sqrt{1 - 2x}$.

А. $x \ge \dfrac{1}{2}$. **Б.** $x \le \dfrac{1}{2}$. **В.** $x \ge 2$. **Г.** $x \le 2$.

16. Розв'яжіть нерівність: $x^2 < 4$.

А. $(2; +\infty)$. **Б.** $(-2; 2)$.
В. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. **Г.** $(-\infty; 2)$.



§1. Числові множини

Поняття числа є основним для всієї математики. Із її розвитком розвивалось та збагачувалось і поняття числа.

У цьому параграфі зроблено огляд основних числових систем, які вивчались раніше, докладніше розглядаються множини раціональних і дійсних чисел.

1. Множина раціональних чисел

Уявлення про числа формувались поступово під впливом вимог практичної діяльності. З давніх часів числа вживались: а) при лічбі; б) при вимірюванні величин.

Вивчення математики ви починали з ***натуральних чисел***, тобто з чисел 1, 2, 3, 4, 5, ..., які використовувались при лічбі. При додаванні і множенні натуральних чисел завжди отримують натуральні числа. Але різниця і частка від ділення натуральних чисел можуть не бути натуральними числами.

Якщо приєднати до натуральних чисел від'ємні числа і нуль, то множина натуральних чисел розширюється до ***множини цілих чисел***. Від'ємні цілі числа разом з натуральними дозволяють характеризувати зміну численності множини без вказівки на напрямок зміни. Наприклад, якщо кількість виробів, виготовлених робітником за зміну, змінилась на +20, то це означає, що вона збільшилась на 20, а якщо на –20, то — зменшилась. Те саме стосується запису розміру прибутку і збитку, температури повітря, швидкості руху за течією і проти течії річки тощо. Для будь-яких цілих чисел їхня різниця є цілим числом. Однак частка від ділення двох цілих чисел може не бути цілим числом.

Дробові числа з'явились як результат вимірювання. Нехай потрібно виміряти довжину класної дошки. Припустимо, що метр у довжині класної дошки уклався один раз і залишилася остача, менша від метра. У такому разі поділяємо метр, наприклад, на 10 рівних частин, вимірюємо остачу десятими долями метра і знаходимо, що остача містить 7 десятих частин метра. Отримали дробове число $1\frac{7}{10}$. Цілі числа разом з дробовими утворюють ***множину раціональних чисел***. При виконанні чотирьох арифметичних дій (окрім ділення на 0) над раціональними числами завжди отримують раціональні числа. Кожне раціональне число можна подати у вигляді звичайного дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, n — натуральне.

Множину натуральних чисел зазвичай позначають літерою **N**, множину цілих чисел — **Z**, множину раціональних чисел — **Q**.

Кожне раціональне число можна подати також у вигляді десяткового дробу, скінченного або нескінченного. Наприклад,

$$\frac{1}{8} = 0{,}125; \quad 2\frac{7}{25} = 2\frac{28}{100} = 2{,}28; \quad \frac{1}{9} = 0{,}1111\ldots .$$

Останній десятковий дріб є періодичним з періодом 1 і його записують так: 0,(1), читається: «нуль цілих і один у періоді».

Різні нескінченні десяткові дроби зображають різні раціональні числа. Виняток складають дроби з періодом 9, які можна вважати іншим записом дробів з періодом 0: 1,(9) = 1,999... = 2,000... = 2; 0,3(9) = 0,3999... = = 0,4000... = 0,4. Для нескінченних десяткових дробів з періодом 9, як правило, застосовують запис дробами з періодом 0. Якщо ототожнити періодичні дроби з періодом 9 з відповідними періодичними дробами з періодом 0, то між раціональними числами і десятковими періодичними дробами існуватиме взаємно однозначна відповідність.

Теорема 1. Кожне раціональне число $\frac{m}{n}$ можна зобразити у вигляді десяткового періодичного дробу.

□ Твердження випливає з того, що в процесі ділення чисельника m на знаменник n після виділення цілої частини кожна з остач буде меншою від n, тобто остача може дорівнювати одному з чисел 0, 1, 2, …, $n - 1$. Тому не пізніше, ніж після n-го кроку, якась з остач повториться, і відтак у частці буде повторюватись та сама група цифр. ■

! Якщо при діленні «куточком» отримують скінченний десятковий дріб, то його завжди можна записати у вигляді періодичного з періодом, що дорівнює нулю, приписавши справа як десяткові знаки безліч нулів.

Приклад 1. Записати числа $\frac{9}{40}$ і $\frac{3}{25}$ у вигляді десяткового періодичного дробу.

□ Маємо: $\frac{9}{40} = 0{,}225 = 0{,}225000... = 0{,}225(0)$, $\frac{3}{25} = 0{,}12 = 0{,}12000... = 0{,}12(0)$. ■

Відповідь. 0,225(0); 0,12(0).

Зауважимо, що знаменники дробів, що розглядались у прикладі 1, своїми простими множниками мають лише числа 2 і 5: $40 = 2^3 \cdot 5$, $25 = 5^2$. Виявляється, що і взагалі, коли знаменник дробу має своїми простими множниками лише числа 2 і 5, то такий дріб перетворюється у скінченний десятковий дріб.

Дроби, знаменники яких у своїх розкладах на прості множники містять числа, що відрізняються від 2 і 5, перетворюються на нескінченні десяткові дроби.

Приклад 2. Записати числа $\frac{5}{3}$, $\frac{9}{56}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{8}{35}$ у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу.

□ $\frac{5}{3} = 1{,}6666... = 1{,}(6)$; $\frac{9}{56} = 0{,}160714285714285... = 0{,}160(714285)$;
$\frac{5}{6} = 0{,}8333... = 0{,}8(3)$; $\frac{2}{11} = 0{,}18181818... = 0{,}(18)$;
$\frac{8}{35} = 0{,}2285714285714... = 0{,}2(285714)$. ■

Якщо x — від'ємне раціональне число, то у вигляді нескінченного десяткового дробу подають йому протилежне число і перед одержаним числом ставлять знак «мінус».

Правильним є і твердження, обернене до теореми 1.

Теорема 2. **Кожен десятковий періодичний дріб зображає певне раціональне число.**

Якщо десятковий дріб має своїм періодом число 0, то це твердження є очевидним. Наприклад, $2{,}73(0) = 2{,}73000... = 2{,}73 = \frac{273}{100}$.

У загальному випадку можна скористатися формулою суми нескінченної спадної геометричної прогресії:

$$S = \frac{a_1}{1-q},$$

де a_1 — перший член геометричної прогресії, q — її знаменник ($|q| < 1$).

Приклад 3. Записати у вигляді звичайного дробу періодичний дріб: 1) 3,(7); 2) 1,5(38).

☐ 1) Запишемо періодичний десятковий дріб без дужок: 3,7777... . Подамо одержаний дріб у вигляді суми цілої частини, десятих, сотих і т. д. часток:

$$3{,}7777... = 3 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ... \, .$$

Доданки суми $\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ...$ є членами нескінченної спадної геометричної прогресії з першим членом $a_1 = \frac{7}{10}$ і знаменником $q = \frac{1}{10}$ ($|q| < 1$).

За формулою суми нескінченної спадної геометричної прогресії, маємо:

$$\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ... = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}.$$

Отже, $3{,}(7) = 3\frac{7}{9}$.

2) $1{,}5(38) = 1{,}5383838... = 1 + \frac{5}{10} + \frac{38}{1000} + \frac{38}{100000} + ... = 1 + \frac{5}{10} + \frac{0{,}038}{1 - 0{,}01} = 1 + \frac{5}{10} + \frac{38}{990} = 1 + \frac{5 \cdot 99 + 38}{990} = 1\frac{433}{990}$. ■

Відповідь. 1) $3\frac{7}{9}$; 2) $1\frac{433}{990}$.

✓ Контрольні запитання

1°. Чи правильно, що:
а) кожне ціле число є натуральним;
б) кожне ціле число є раціональним?

2°. Яка множина доповнює множину цілих чисел до множини раціональних чисел?

3°. Чому дорівнює період десяткового дробу 49,35727272...?

4°. Які з наступних звичайних дробів перетворюються у скінченні десяткові дроби: $\frac{3}{16}, \frac{7}{49}, \frac{5}{6}, \frac{7}{50}, \frac{11}{15}, \frac{3}{25}, \frac{21}{80}, \frac{2}{21}, \frac{7}{125}$?

5. Скільки цифр має період зображення раціонального числа $\frac{3}{11}$ у вигляді нескінченного десяткового дробу?

2. Множина дійсних чисел

Для точного вимірювання довжин відрізків раціональних чисел не вистачає. Наприклад, не існує раціонального числа, яке б дорівнювало довжині гіпотенузи рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо довжина його катета є одиницею виміру ($\sqrt{2}$ не є раціональним числом!).

У множині раціональних чисел не будь-яке рівняння виду $x^2 = a$ має розв'язок. Наприклад, рівняння $x^2 = 2$ у множині раціональних чисел не має розв'язків, бо не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2. Потрібно розширити множину раціональних чисел.

Нові числа можна ввести, розглядаючи нескінченні неперіодичні десяткові дроби.

У попередньому пункті було показано, що будь-яке раціональне число можна записати у вигляді періодичного десяткового дробу і кожен десятковий періодичний дріб є раціональним числом. Якщо ж нескінченний десятковий дріб не є періодичним, то він не є раціональним числом. Наприклад, дріб 0,12345678910111213..., у якому після коми стоять усі натуральні числа, — неперіодичний, а тому він не зображає жодного раціонального числа. Даний дріб є ірраціональним числом.

Ірраціональним числом називається нескінченний десятковий неперіодичний дріб.

Приклади ірраціональних чисел: 0,35355355535555... (після першої трійки — одна п'ятірка, після другої — дві і т. д.), $\sqrt{2}$ = = 1,41421356..., π = 3,1415926535... (відношення довжини кола до діаметра).

Ірраціональні числа x і y, записані у вигляді нескінченних десяткових дробів, порівнюються за тими самими правилами, що і скінченні десяткові дроби: якщо ціла частина числа x менша від цілої частини числа y, то $x < y$. Якщо цілі частини двох чисел рівні, то для їхнього порівняння доводиться звертатись до їхніх дробових частин. Наприклад, 12,72241… < 12,72250…, оскільки у цих чисел рівні цілі частини і перші три десяткові знаки після коми, а четвертий знак після коми у лівого числа менший: 4 < 5.

Раціональні та ірраціональні числа утворюють множину ***дійсних чисел***. Цю множину позначають буквою **R**. Кожне дійсне число зображається у вигляді десяткового дробу (скінченного чи нескінченного).

Дійсні числа можна додавати, віднімати, множити і ділити (за умови, що дільник відмінний від нуля), причому дії над дійсними числами мають ті самі властивості, що і дії над раціональними числами. У прикладних задачах при виконанні дій над дійсними числами їх замінюють раціональними наближеними значеннями.

Приклад 4. Дві матеріальні точки обертаються по колах з радіусами 3 м і 4 м. Кожна з них за 1 с робить один оберт. Яку загальну відстань вони разом подолають за 1 с? Обчислення виконати з точністю до 1 м.

☐ Загальна відстань дорівнює сумі довжин двох кіл, описаних даними матеріальними точками за 1 с. Оскільки довжина кола обчислюється за формулою $l = 2\pi R$, де R — радіус кола, l — його довжина, то можна обчислити довжину кожного кола (при обчисленні зберігаємо один додатковий десятковий знак): $l_1 = 2\pi \cdot 3 = 6\pi \approx 6 \cdot 3{,}1 = 18{,}6$ (м), $l_2 = 2\pi \cdot 4 = 8\pi \approx 8 \cdot 3{,}1 = 24{,}8$ (м). Загальна ж відстань дорівнює $l_1 + l_2 \approx 18{,}6 + 24{,}8 = 43{,}4$ (м). Округливши результат до 1 м, дістанемо: $l_1 + l_2 \approx 43$ (м). ■

Відповідь. 43 м.

Геометрично дійсні числа зображаються за допомогою точок ***координатної прямої***, тобто прямої з вибраними початком координат, додатним напрямом відліку та одиницею масштабу.

Основна властивість дійсних чисел.

Кожному дійсному числу відповідає єдина точка координатної прямої, і навпаки, кожній точці координатної прямої відповідає єдине дійсне число.

Враховуючи цю відповідність, часто не відрізняють число та точку, що його зображає. Наприклад, кажуть «точка 5», «точка 2», «точка x» і позначають відповідну точку координатної прямої числом «5», «2», «x». Координатну пряму називають також ***числовою віссю.*** Те, що точка A має координату x, записують: $A(x)$.

Зазвичай координатну пряму розміщують горизонтально, додатний напрям обирають зліва направо, початок координат позначають буквою O. При цьому, якщо $a < b$, то точка a міститься на числовій осі лівіше від точки b (рис. 2, а); якщо ж $a > b$, то точка a міститься правіше від точки b (рис. 2, б).

Рис. 2

Приклад 5. На координатній прямій зобразити точки за їхніми координатами: $A(-2)$; $B\left(\frac{2}{3}\right)$; $C\left(-\frac{1}{2}\right)$; $D(0{,}3)$; $E\left(\sqrt{2}\right)$.

□ Точку $A(-2)$ отримаємо, якщо на координатній прямій відкладемо у від'ємному напрямі дві одиниці масштабу (рис. 3). Точку $B\left(\frac{2}{3}\right)$ можна побудувати, якщо поділити одиницю масштабу на три рівні частини. Точки $C\left(-\frac{1}{2}\right)$; $D(0{,}3)$ будуються аналогічно (одиниця масштабу поділяється відповідно на дві і десять рівних частин). Для зображення точки $E\left(\sqrt{2}\right)$ можна скористатись наближеним значенням $\sqrt{2}$, наприклад, 1,4. ■

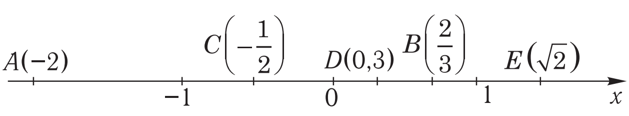


Рис. 3

Геометричне тлумачення дійсних чисел дозволяє наочно ввести поняття модуля числа.

Відстань від початку координат О до точки х називається модулем числа х і позначається $|x|$.

З означення випливає, що при $x \geq 0$ відстань від O до x дорівнює x, тобто ***модулем невід'ємного числа є саме це число.*** Якщо ж $x < 0$, то відстань від O до x дорівнює $-x$, тобто ***модулем від'ємного числа є протилежне до нього число***. Отже, $|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$ тобто вираз для модуля дійсного числа збігається з означенням модуля раціонального числа. Наприклад, $|3| = 3$, $|-5| = 5$, $\left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1$, $|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{якщо } x \geq 1, \\ 1-x, & \text{якщо } x < 1. \end{cases}$

На координатній прямій також зображають числові проміжки: відрізки, інтервали, напівінтервали. Далі наведено їхній запис за допомогою дужок, нерівностей, а на рис. 4 — їхнє зображення на координатній прямій.

$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	(відрізок)
$(a; b]$	$a < x \leq b$	(напівінтервал)
$(a; b)$	$a < x < b$	(інтервал)
$(-\infty; a)$	$-\infty < x < a$	(нескінченний інтервал)
$(-\infty; a]$	$-\infty < x \leq a$	(нескінченний напівінтервал)
$[a; +\infty)$	$a \leq x < +\infty$	(нескінченний напівінтервал)
$(a; +\infty)$	$a < x < +\infty$	(нескінченний інтервал)
$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$	$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$	(окіл точки a з радіусом ε)

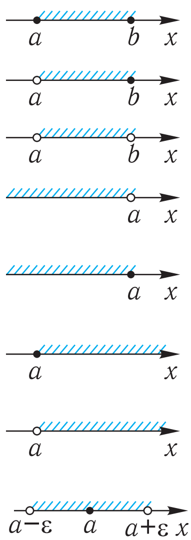


Рис. 4

Належність кінцевої точки проміжку позначається на координатній прямій замальованим кружечком. Незамальований кружечок означає, що точка не належить проміжку, тобто є «виколотою». Число $b - a$ є ***довжиною*** кожного з проміжків $[a; b]$, $[a; b)$,

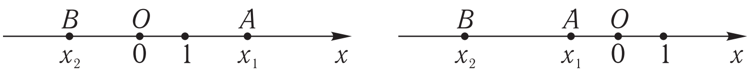
$(a; b]$, $(a; b)$. Проміжок $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ називається ***околом*** точки a з радіусом $\varepsilon > 0$. Точка a є серединою цього проміжку, його довжина дорівнює 2ε.

Поняття модуля дійсного числа, його геометричне тлумачення широко застосовується при розв'язанні різноманітних задач.

Теорема 3. Відстань між точками координатної прямої дорівнює модулю різниці чисел, що відповідають їм.

☐ Нехай дано точки $A(x_1)$, $B(x_2)$. Треба довести, що $AB = |x_1 - x_2|$. Доведення теореми зводиться до розгляду різних випадків розміщення точок $A(x_1)$ і $B(x_2)$ на координатній прямій. Якщо $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, (рис. 5, а), то $AB = AO + OB = x_1 + (-x_2) = x_1 - x_2 = |x_1 - x_2|$. Якщо $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, $|x_1| < |x_2|$, тобто точка A розташована ближче до точки O, ніж точка B (рис. 5, б), то $AB = BO - OA = -x_2 - (-x_1) = x_1 - x_2 = |x_1 - x_2|$. Аналогічно розглядаються інші випадки. Ми довели, що *модуль різниці двох чисел дорівнює відстані між точками, якими зображаються дані числа.* ■

Користуючись поняттям модуля, легко записати деякі геоме-



а) б)

Рис. 5

тричні твердження в алгебраїчній формі. Наприклад, «відстань від точки x до точки 1 дорівнює 2» означає, що $|x-1| = 2$, а «відстань від точки x до точки -1 менша ніж 3» — $|x+1| < 3$.

Геометричним змістом модуля зручно користуватись при розв'язанні найпростіших рівнянь та нерівностей, які містять вирази з модулями.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $|x+2| = 1$.

☐ Перепишемо дане рівняння у вигляді $|x-(-2)| = 1$. Геометрично воно означає, що відстань від шуканої точки x до точки -2 дорівнює 1. Відкладаючи на коорди-

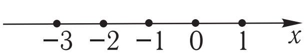


Рис. 6

натній прямій (рис. 6) від точки –2 по обидва боки від неї відрізки завдовжки 1, одержимо: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$. ■

Відповідь. –3; –1.

Приклад 7. Розв'язати нерівність: 1) $|x-5| \le 3$; 2) $|x+2| > 1$.

□ 1) Геометричний зміст завдання полягає у тому, щоб знайти множину точок *x,* які віддалені від точки 5 на відстань, не більшу, ніж 3. Зобразимо ці точки на рисунку (рис. 7). Запишемо відмічені точки у вигляді проміжку: [2; 8]. Розв'язком нерівності є точки відрізка [2; 8].

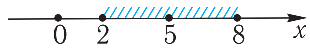


Рис. 7

2) Нерівність можна переписати у такому вигляді: $|x-(-2)| > 1$. Потрібно знайти множину точок *x*, які віддалені від точки –2 на відстань, що перевищує 1. Зобразимо ці точки на рисунку (рис. 8).

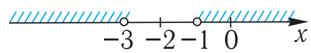


Рис. 8

Розв'язком нерівності є точки множини $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$. ■

Відповідь. 1) [2; 8]; 2) $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$.

✓ Контрольні запитання

1°. Серед наведених чисел вкажіть натуральні, цілі, раціональні, ірраціональні: $(-3)^3$; $(-3)^2$; 3,14; π; $\sqrt{64}$; $\sqrt{50}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{9}{3}$; 1,0(56).

2°. Які числа задовольняють рівняння:
а) $|x| = 4$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = -4$?

3°. Які з наступних чисел можна подати у вигляді періодичних десяткових дробів, а які — у вигляді нескінченних неперіодичних десяткових дробів: $\frac{2}{11}$; $\sqrt{3}$; $\frac{3}{8}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{25}$; $-\frac{12}{17}$; $-\sqrt{6}$?

4°. Чи може добуток раціональних чисел бути ірраціональним числом?

5. Чи може добуток ірраціональних чисел бути раціональним числом?

6. Яка з рівностей $|x| = x$ чи $|x| = -x$ є правильною, якщо:

1) $x = \sqrt{2} - 1$; 2) $x = \sqrt{3} - 2$;
3) $x = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}$; 4) $x = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$?

Задачі

1°. Подайте число у вигляді нескінченного десяткового дробу:

1) 5; 2) $\frac{7}{3}$; 3) $-\frac{3}{7}$; 4) $\frac{7}{5}$.

2. Подайте число у вигляді звичайного дробу:

1°) 0,27; 2) 0,2222...; 3) 2,(31); 4) 3,4(52).

3°. Порівняйте числа:

1°) $\frac{11}{315}$ і $\frac{11}{305}$; 2°) $-\frac{6}{7}$ і $\frac{5}{7}$; 3) $\frac{3}{4}$ і $\frac{5}{6}$; 4) 0,58 і $\frac{7}{12}$.

4. Виконайте дії і запишіть результат у вигляді скінченного або нескінченного десяткового дробу:

1) $\frac{5}{6}+\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{9}+0{,}25$; 3) $\frac{5}{21}\cdot 3{,}15$; 4) $\frac{2}{15}:3{,}2$.

5. Дано два раціональних числа:

1) 0,53 і 0,64; 2) –0,03 і 0,03; 3) 0,3462 і 0,3463; 4) $\frac{1}{3}$ і $\frac{2}{7}$.

Вкажіть принаймні одне раціональне число, яке міститься поміж ними.

6. Назвіть декілька додатних значень змінної a, при яких значення виразу $\sqrt{a}$ є:

1) ірраціональним числом; 2) раціональним числом.

7°. На рис. 9 зображено числові множини. Запишіть задані множини у вигляді числових проміжків.

Рис. 9

8°. Зобразіть на координатній прямій числові множини:

1) (3; 4); 2) [– 2; 1); 3) [–2; –1]; 4) $(-\infty; -2]$; 5) $[1; +\infty)$.

9°. Зобразіть на координатній прямій множину точок, координати яких задовольняють умову:

1) $1 < x < 2$; 2) $1 \le x \le 3$; 3) $-1 < x \le 1$; 4) $x > 4$; 5) $x \le -3$.

10°. Як записати у вигляді нерівності з модулем нерівність:

1) $-2 \le x \le 2$; 2) $-1 \le x \le 3$; 3) $-5 \le x \le 3$?

11. Дано точки $A(3)$ і $B(5)$. Знайдіть координати точки:

1) симетричної точці A відносно B;

2) симетричної середині відрізка AB відносно точки B.

12. Для кожного з наступних інтервалів укажіть його довжину і координату його середини:

1) $(1,3;\ 2,56)$; 2) $(-\pi;\ 2\pi)$; 3) $(-2,13;\ 2,15)$.

13. Зобразіть на координатній прямій множину точок, координати яких задовольняють умову:

1) $|x| = 3$; 2) $|x| \le 3$; 3) $|x| > 3$; 4) $|x| > -3$; 5) $|x| < -3$.

14. Знайдіть $|x|$, якщо:

1) $x = \frac{7}{8} - \frac{8}{9}$; 2) $x = 3 - \sqrt{8}$;

3) $x = 4 - 3\sqrt{2}$; 4) $x = 2,(251) - 2,25(1)$.

15. Обчисліть значення виразу: 1) $|-a| - 2|b|$, якщо $a = -1,\ b = -2$;

2) $\dfrac{-1 - |-3a| + 4|b|}{2|a| + |b|}$, якщо $a = -4,\ b = 0$.

16. Розв'яжіть рівняння:

1) $|2x + 1| = 3$; 2) $|2 - 4x| = 1$; 3) $|2x - 5| = -2$; 4) $|x + 2| = x + 2$.

17. Розв'яжіть нерівність:

1) $|x + 3| > 2$; 2) $|4x - 1| < 1$; 3) $|x - 2| < 1 - \sqrt{2}$.

18*. Порівняйте значення виразів:

1) $|a|$ і a; 2) $-|a|$ і a; 3) $|a^2|$ і a^2.

Вправи для повторення

19. Запишіть у вигляді звичайного дробу:

1) 6%; 2) 18%; 3) $\frac{2}{3}$%;

4) $3\frac{3}{4}$%; 5) $112\frac{1}{2}$%; 6) 350%.

20. Виразіть у відсотках:

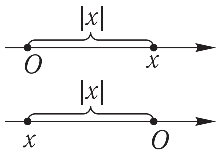
1) 0,08; 2) 0,6; 3) 2; 4) 3,2; 5) 0,0043.

21. На скільки відсотків збільшиться площа круга, якщо його радіус збільшити на 20%?

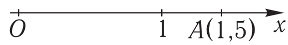
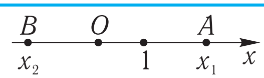
22. Богдан і Грицько грали в одній баскетбольній команді. Богдан за гру 20 разів кидав м'яч у кошик, при цьому 15 разів його кидки були влучними. Гриць зробив 25 кидків, з яких 18 виявились влучними. Хто з них був влучнішим у цій грі?

Підсумок

Основні поняття

Означення	Геометрична інтерпретація, приклади	Застосування
Ірраціональним числом називається нескінченний десятковий неперіодичний дріб.	0,35355355535555..., $\sqrt{2}$ = 1,41421356..., π = 3,1415926535... .	Ірраціональні числа дають можливість вимірювати довжини відрізків, несумірних з одиничним відрізком.
Відстань від початку координат O до точки x називається модулем числа x і позначається $\|x\|$.		Поняття модуля числа дозволяє записувати за допомогою виразів взаємне розміщення точок на координатній прямій.

Головні твердження

Зміст твердження	Приклади
Кожне раціональне число $\frac{m}{n}$ можна зобразити у вигляді десяткового періодичного дробу.	$\frac{5}{3} = 1,6666... = 1,(6).$
Кожен десятковий періодичний дріб зображає певне раціональне число.	$3,(7) = 3\frac{7}{9}.$
Кожному дійсному числу відповідає єдина точка координатної прямої, і навпаки, кожній точці координатної прямої відповідає єдине дійсне число.	
Відстань між точками координатної прямої дорівнює модулю різниці чисел, що відповідають їм.	 $AB = \|x_1 - x_2\|.$