РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

БІНАРНИЙ УРОК АЛГЕБРИ ТА ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ Й ІНФОРМАТИКИ, 10 КЛАС

Олена КОЦЮРУБА, *учитель математики*;
Євгенія БЕКЕТОВА, *учитель інформатики, СЗШ № 163, м. Київ*

Мета: перевірити та закріпити вміння і навички розв'язування лінійних тригонометричних рівнянь різними способами; формувати вміння аналізувати різні способи розв'язування однієї задачі та обирати раціональніший, навички з використання навчальних програм із математики для побудови графіків функцій та розв'язування рівнянь графічним способом, користуватися навчальними програмами для вирішення конкретних прикладних задач; підвищувати інформаційну культуру, вдосконалювати навички математичної мови учнів, розвивати інтерес до математики та інформатики.

Обладнання: інтерактивна дошка, учнівські комп'ютери, роздатковий матеріал для самостійної роботи.

ХІД УРОКУ

Для всех математиков характерна дерзость ума.
Математик не любит, когда ему
о чём-либо рассказывают,
он стремится познать всё сам.
У. Сойер

І. Повідомлення теми і мети уроку.

ІІ. Актуалізація опорних знань учнів.
(Проводить учитель математики.)

Запитання

1. Які рівняння називаються тригонометричними?

(Тригонометричними називають рівняння, в яких невідома (змінна) входить лише під знак тригонометричної функції.)

2. Яка особливість розв'язків тригонометричних рівнянь?

(Рівняння або не мають розв'язків, або мають їх безліч унаслідок властивості періодичності тригонометричних функцій.)

3. Які тригонометричні рівняння називаються найпростішими?

(Рівняння виду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.)

4. Що означає розв'язати тригонометричне рівняння?

(Знайти множину всіх значень змінної (кутів, дуг), при яких рівняння перетворюється в правильну числову рівність.)

5. Записати формули розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь.

При яких значеннях a ці рівняння мають розв'язки?

(
$\sin x = a$, $|a| \le 1$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
$\cos x = a$, $|a| \le 1$, $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
$\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
$\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.)

6. Записати формули розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь $\sin x = a$, $\cos x = a$, якщо $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$.

(
$\sin x = -1$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
$\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
$\sin x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
$\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
$\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
$\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.)

7. Які тригонометричні рівняння називаються однорідними?

(Рівняння виду
$$a_0 \cos^n x + a_1 \cos^{n-1} x \sin x + \ldots + a_n \sin^n x = 0,$$
де a_0, a_1, ..., a_n — задані числа, $a_0 \ne 0$, $n \in \mathbb{N}$, називаються однорідними відносно функцій $\sin x$ і $\cos x$.)

8. Як розв'язуються однорідні рівняння n-го степеня відносно синуса і косинуса?

(Діленням обох частин рівняння на $\cos^n x$ ($\sin^n x$).)

9. Які тригонометричні рівняння називаються лінійними?

(Рівняння виду $a\sin x + b\cos x = c$, де a, b, c — довільні дійсні числа.)

10. Коли існують розв'язки лінійних тригонометричних рівнянь?

(Якщо виконується умова $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$, тобто $a^2+b^2 \ge c^2$.)

11. Назвати способи розв'язування лінійних тригонометричних рівнянь, коли $a \ne b \ne c$.

(Зведення до однієї тригонометричної функції, зведення рівняння до однорідного відносно синуса і косинуса, введення допоміжного аргументу, заміна $\sin x$ і $\cos x$ на тангенс половинного кута (універсальна підстановка), графічний.)

12. Назвати способи розв'язування лінійних тригонометричних рівнянь, коли або $b = c$, або $a = c$, або $a = b$.

(Розкладання на множники ($b = c$, або $a = c$), перетворення різниці (суми) тригонометричних функцій у добуток ($a = b$).)

III. Різні способи розв'язування лінійного тригонометричного рівняння $\sin x - \cos x = 1$.

(Розпочинає вчитель математики.)

Спосіб зведення до однієї тригонометричної функції

Оскільки $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$, то

$\sin x - \cos x = 1$,

$\sin x = 1 + \cos x$,

$\pm\sqrt{1-\cos^2 x} = 1 + \cos x$.

Піднесемо обидві частини останнього рівняння до квадрата:

$1-\cos^2 x = 1 + 2\cos x + \cos^2 x$,

$2\cos^2 x + 2\cos x = 0$,

$\cos x(\cos x + 1) = 0$.

Добуток двох або кількох множників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них дорівнює нулю, а інші при цьому не втрачають змісту.

Тому

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x + 1 = 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Оскільки ми використовували піднесення обох частин рівняння до квадрата, то могли з'явитися сторонні корені. Тому необхідно виконати перевірку. Перепишемо останню сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Підставимо кожне значення змінної у дане рівняння:

якщо $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, то

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) =$

$= \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1$,

$1 = 1$;

якщо $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, то

$\sin(\pi + 2\pi n) - \cos(\pi + 2\pi n) =$

$= \sin\pi - \cos\pi = 0 - (-1) = 1$,

$1 = 1$;

якщо $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$, то

$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right) =$

$= \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 0 = -1$,

$-1 \ne 1$.

Отже, задане рівняння задовольняють лише $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Спосіб зведення рівняння до однорідного відносно синуса та косинуса

До лівої частини даного рівняння застосуємо формулу подвійного аргументу, а праву частину замінимо тригонометричною одиницею.

$\sin x - \cos x = 1$,

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2},$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0,$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=0,\\ \sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=0,\\ \mathrm{tg}\frac{x}{2}=1;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z};\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};\ x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Спосіб введення допоміжного аргументу

Помножимо обидві частини заданого рівняння на число $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x=\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};\ x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Спосіб заміни $\sin x$ *і* $\cos x$ *на тангенс половинного кута*

Нехай $\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Тоді

$$\sin x=\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}},\ \cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Матимемо:

$$\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}-\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=1,$$

$$2\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}=1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2},$$

$$2\mathrm{tg}\frac{x}{2}=2,$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=1,$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Нехай $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$,

$x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Перевіримо, чи буде $x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ розв'язком даного рівняння:

$\sin(\pi+2\pi k)-\cos(\pi+2\pi k)=$

$\sin\pi-\cos\pi=0-(-1)=0+1=1,$

$1=1.$

Отже, $x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ — розв'язок даного рівняння.

Відповідь. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Спосіб розкладання на множники

Дане рівняння перепишемо так:

$\sin x-(1+\cos x)=0.$

Оскільки $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$, $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, то

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}=0,$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

Далі розв'язуємо так само, як при застосуванні способу зведення рівняння до однорідного відносно синуса та косинуса.

Відповідь. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};\ x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Спосіб перетворення різниці (суми) тригонометричних функцій у добуток

Дане рівняння запишемо так:

$$\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1.$$

Застосуємо формулу різниці синусів:

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}=1,$$

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1,$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

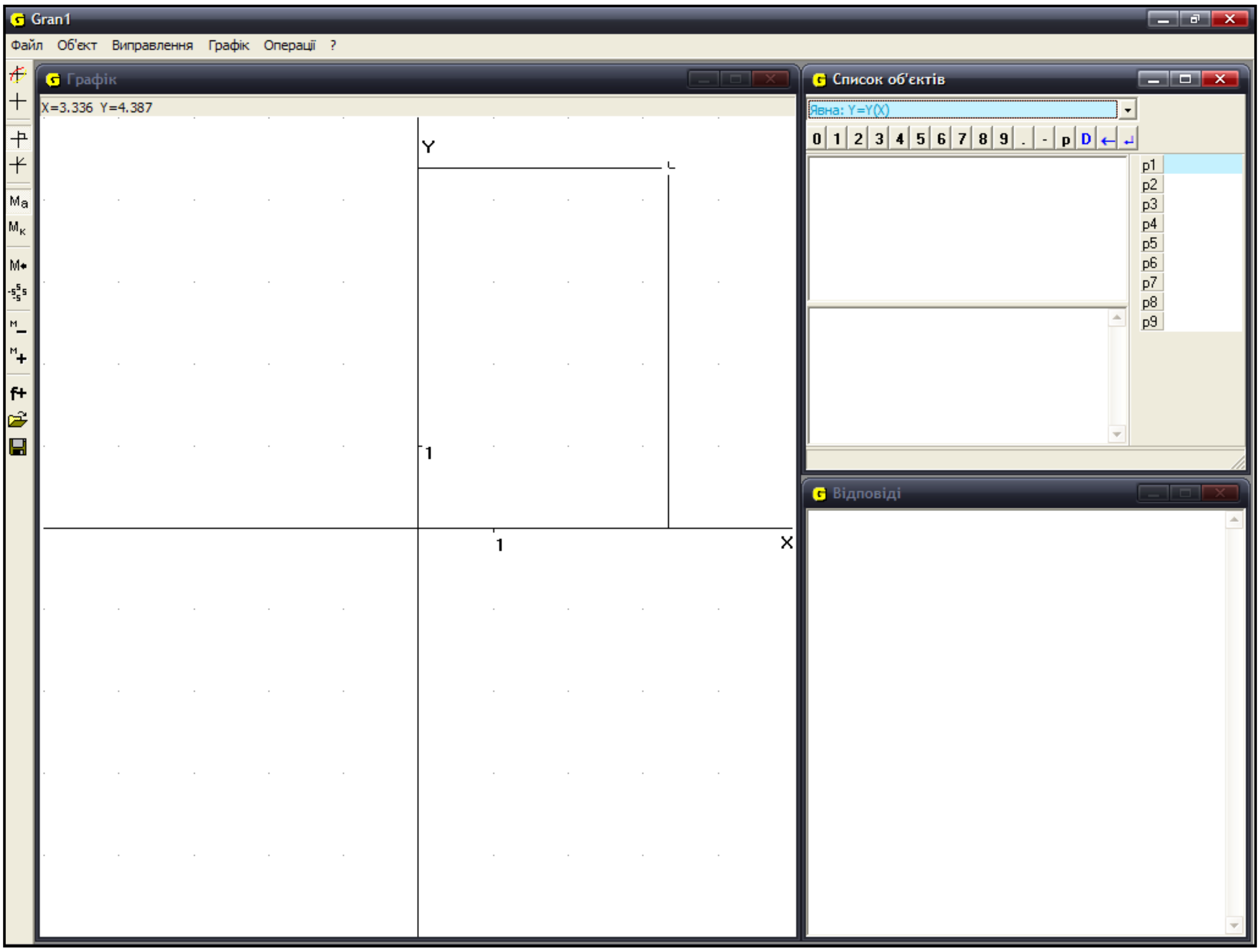

Рис. 1

Далі розв'язуємо так само, як при застосуванні способу введення допоміжного аргументу.

Відповідь. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z};\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Графічний спосіб

(Продовжує вчитель інформатики.)

Дане рівняння перепишемо так:

$$\sin x = \cos x + 1.$$

Розв'язки знайдемо як абсциси точок перетину графіків функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x + 1$.

Існують спеціальні навчальні програми для автоматизації процесу побудови графіків функцій. Розглянемо навчальну програму з підтримки навчання математики GRAN1. Після завантаження програми ви бачите три вікна (рис. 1).

У вікні **Об'єкт** задаємо функції, графіки яких треба побудувати. Обираємо **Явну функцію**. В меню **Об'єкт** вибираємо послугу **Створити**. Програма відкриває вікно, в якому вводимо формулу функції, задаємо верхню та нижню межі побудови графіка функції (рис. 2), натискаємо **ОК**.

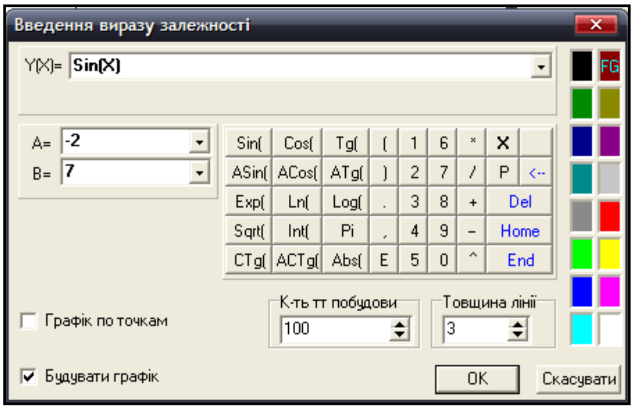

Рис. 2

Потім знову в **Об'єкт** вибираємо послугу **Створити** і вводимо формулу другої функції (рис. 3).

У меню **Графік** вибираємо послугу **Побудувати**. У вікні **Графік** відображаються побудовані графіки (рис. 4).

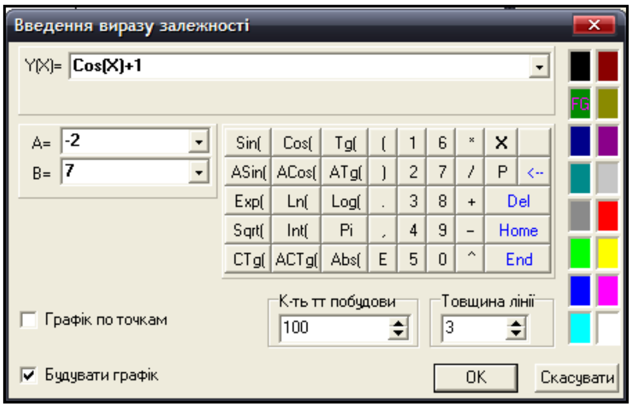

Рис. 3

Навівши курсор на точку перетину графіків, отримуємо наближені значення її абсциси — кореня рівняння.

Існують приклади рівнянь, для яких графічний спосіб розв'язування є чи не єдиним, доступним для учнів 10-го класу способом розв'язування. Учні отримують картки із завданням (збірники з підготовки до ЗНО), яке вони виконують за допомогою навчальної програми GRAN1. Результати зберігаються у власній папці (**Файл — Зберегти**) для подальшої перевірки.

Варіант 1

Скільки розв'язків має рівняння $x^3 = \sin x$?

Варіант 2

Скільки розв'язків має рівняння $x^2 = \cos x + 1$?

IV. Підсумок уроку.

V. Домашнє завдання.

Розв'язати рівняння різними способами. Визначити, який з них є раціональним.

1. $\cos 2x + \cos 4x = 0$.
2. $\sin 5x = -\sin x$.
3. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$.

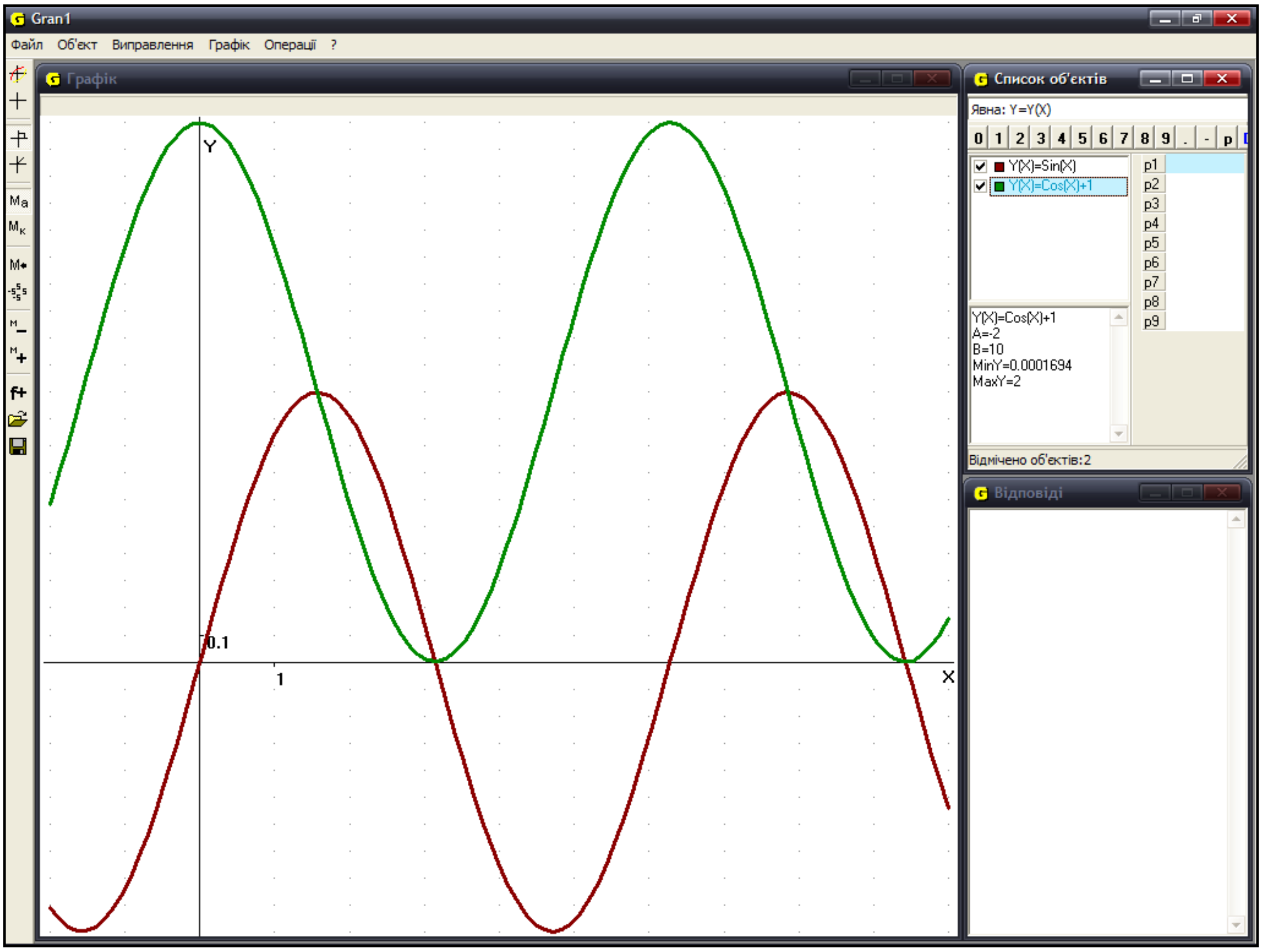

Рис. 4