Збірка прикладів на тему: "Первісна та інтеграл"

Уклав: Виспянський Ігор (**e-mail:** virua@ukr.net)
Дата останнього оновлення: 17.07.07
Веб-сайт: http://www.formula.co.ua

Приклад 1.

Обчислити інтеграл

$$\int_0^\pi \cos^2 x dx .$$

Розв'язок.

$$\int_0^\pi \cos^2 x dx = \int_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x dx = \frac{1}{2} x\Big|_0^\pi + \frac{1}{2\cdot 2}\sin 2x\Big|_0^\pi =$$
$$= \frac{1}{2}(\pi - 0) + \frac{1}{4}(\sin 2\pi - \sin 0) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}(0-0) = \frac{\pi}{2} .$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 2.

Обчислити інтеграл

$$\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} .$$

Розв'язок.

$$\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_8^{27} x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\Big|_8^{27} = 3x^{\frac{1}{3}}\Big|_8^{27} = 3\left(\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8}\right) = 3(3-2) = 3 .$$

Відповідь: 3.

Приклад 3.

Обчислити інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2t - \cos 2t)^2 dt .$$

Розв'язок.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2t - \cos 2t)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin^2 2t - 2\sin 2t \cos 2t + \cos^2 2t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\left(\sin^2 2t + \cos^2 2t\right) - 2\sin 2t\cos 2t\right) dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 4t) dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(-\frac{1}{4}\cos 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(-1-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} .$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

Приклад 4.

Обчислити інтеграл

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x dx .$$

Розв'язок.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^2 - (\sin 0)^2\right) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Приклад 5.

Обчислити інтеграл

$$\int_{0}^{2} (1+3x)^4 dx .$$

Розв'язок.

$$\int_{0}^{2} (1+3x)^4 dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(1+3x)^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{1}{15}\left((1+3\cdot 2)^5 - (1+3\cdot 0)^5\right) = \frac{1}{15}\left(7^5 - 1\right) = 1120{,}4 .$$

Відповідь: $1120{,}4$.

Приклад 6.

Обчислити інтеграл

$$\int_{1}^{e} \frac{dx}{0{,}5x} .$$

Розв'язок.

$$\int_{1}^{e} \frac{dx}{0{,}5x} = \int_{1}^{e} \frac{dx}{\frac{1}{2}x} = \int_{1}^{e} \frac{2dx}{x} = 2\int_{1}^{e} \frac{dx}{x} = 2\cdot \ln|x|\Big|_1^e = 2(\ln e - \ln 1) = 2(1-0) = 2 .$$

Відповідь: 2.

Приклад 7.

Обчислити інтеграл

$$\int_{1}^{0,5} \left(4x - \frac{1}{2x}\right) dx .$$

Розв'язок.

$$\int_{1}^{0,5} \left(4x - \frac{1}{2x}\right) dx = 4\int_{1}^{0,5} x dx - \frac{1}{2}\int_{1}^{0,5} \frac{1}{x} dx = 4\frac{x^2}{2}\Big|_1^{0,5} - \frac{1}{2}\cdot \ln|x|\Big|_1^{0,5} = 2\left((0{,}5)^2 - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln 1\right) =$$

$$= -1{,}5 - \frac{1}{2}\cdot\left(\ln 2^{-1} - 0\right) = -\frac{1}{2}\cdot \ln 2^{-1} - 1{,}5 = \frac{1}{2}\ln 2 - 1{,}5 .$$

Відповідь: $\frac{1}{2}\ln 2 - 1{,}5$.

Приклад 8.

Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^3}.$$

Розв'язок.

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^3} = \int_0^1 \frac{(x+1-1)dx}{(x+1)^3} = \int_0^1 \frac{(x+1)dx}{(x+1)^3} - \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^3} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} - \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^3} =$$

$$= -\frac{1}{x+1}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Відповідь: $\frac{1}{8}$.

Приклад 9.

Обчислити інтеграл

$$\int_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{2}dx.$$

Розв'язок.

$$\int_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{2}dx = -2\cos\frac{x}{2}\Big|_{-\pi}^{2\pi} = -2\cos\frac{2\pi}{2} + 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\cos\pi + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\cdot(-1) + 2\cdot 0 = 2.$$

Відповідь: 2.

Приклад 10.

Обчислити інтеграл

$$\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right)dx.$$

Розв'язок.

$$\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right)dx = \int_0^{\pi}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\cos 3x + \sin\frac{2\pi}{3}\cdot\sin 3x\right)dx =$$

$$= \int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{2}\cdot\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 3x\right)dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 3xdx + \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{\pi}\sin 3xdx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x\Big|_0^{\pi} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{6}(\sin 3\pi - \sin 0) - \frac{\sqrt{3}}{6}(\cos 3\pi - \cos 0) =$$

Оскільки $\sin 3\pi = \sin(2\pi + \pi) = \sin\pi = 0$, а $\cos 3\pi = \cos(2\pi + \pi) = \cos\pi = -1$, то матимемо

$$= -\frac{1}{6}(0-0) - \frac{\sqrt{3}}{6}(-1-1) = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.