О.Я. Біляніна, Г.І. Білянін, В.О. Швець

ГЕОМЕТРІЯ

10 клас

Академічний рівень

Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Київ
«Генеза»
2010

Шановний старшокласнику!

Науково-технічний прогрес досить стрімко змінює характер існуючих професій і приводить до появи нових, які більшою мірою вимагають уважності, кмітливості та швидкості реакції працюючих. Отже, ***найважливішим завданням навчання стає виховання логіки мислення, засвоєння загальних методів наукового дослідження***.

Звичайно, розв'язання цієї проблеми значною мірою залежить від стану засвоєння математики. Тому математика – базова дисципліна. Вона – основа для успішного вивчення і засвоєння багатьох спеціальних дисциплін у різних галузях.

Пропонуємо тобі новий підручник «Геометрія. 10 клас» академічного рівня, який містить навчально-практичний матеріал вивчення навколишнього світу, адже геометрія як наука – один із специфічних засобів його відображення.

Ти вже знаєш, що шкільний курс геометрії розділено на 2 частини: планіметрію та стереометрію. Цей підручник є початком вивчення стереометрії – науки, яка вивчає фігури та їхні властивості в просторі. Він складається із 7 модулів, структура яких є такою: назва модуля, його короткий зміст і характеристика цілей вивчення; виклад теоретичного матеріалу зі зразками розв'язання; вправи, складені відповідно до чотирьох рівнів складності; задачі прикладного змісту; історичний матеріал у рубриці *«З літопису геометрії»*; запитання для самоконтролю; тест для самоконтролю.

Зразки розв'язання задач мають додаткове пояснення у формі *«Чому саме так?»*. Це допоможе тобі орієнтуватися в змісті задачі та вибирати спосіб її розв'язування.

Модулі 1 і 7 містять матеріали для узагальнення та систематизації відповідних курсів планіметрії та вивченого в 10 класі. Тому виклад їх теоретичного матеріалу носить більш інформаційний характер, ніж усі інші модулі. Розрізнити рівень складності задач початкового, середнього, достатнього і високого рівнів допоможуть відповідні позначки: «°», «°°», «•», «••». У більшості випадків задачі початкового та середнього рівнів ми пропонуємо в тестовій формі. Такі задачі можна виконувати усно або письмово.

Запитання та тести самоконтролю допоможуть тобі повторити та закріпити вивчене в модулі, підготуватися до певного виду контролю. Окремі завдання рубрики «Прикладні задачі» ми наводимо або з вказівками, або з повним розв'язанням. Життя ставитиме перед тобою нові задачі, але сподіваємося, що твої знання, набуті в школі, дадуть змогу їх завжди розв'язувати якісно.

Рубрика *«З літопису геометрії»* вміщає історичний розвиток геометрії в Стародавній Греції, Стародавньому Єгипті, Азії, Європі тощо. Очевидно, що геометрія є наукою не штучною, а природною і необхідною для життя. Вона виникла з потреб людини. Геометрія – це практика, логіка, фантазія! За словами М. В. Ломоносова, «***геометрія – володарка всіх розумових винаходів***».

Бажаємо тобі успіхів у навчанні!

Автори

МОДУЛЬ 1

Систематизація та узагальнення фактів і методів планіметрії

Геметрія – володарка всіх розумових винаходів.

М.В. Ломоносов

КОРОТКИЙ ЗМІСТ МОДУЛЯ

- *Про логічну побудову планіметрії*
- *Основні поняття планіметрії*
- *Аксіоми планіметрії*
- *Опорні факти курсу планіметрії (довідник і практика)*
  - *Взаємне розміщення прямих на площині*
  - *Коло і круг*
  - *Многокутники*
  - *Трикутник і його елементи*
  - *Опуклі чотирикутники*
- *Задачі і методи їх розв'язування*
  - *Алгебраїчні методи*
  - *Геометричні методи*

Опрацювавши цей модуль, ви дізнаєтеся:

- як розрізняють означувані і неозначувані поняття;
- які поняття вибирають за основні;
- як аксіоми впливають на подальшу побудову геометрії;
- яка роль теорем при складанні комплексної характеристики геометричної фігури;
- як коротко скласти відомості про вивчений курс планіметрії;
- які факти курсу планіметрії можуть бути опорними;
- як відрізнити властивість геометричної фігури від її означення;
- як умовно поділяють методи розв'язування геометричних задач;
- які теоретичні знання потрібні для розв'язування нескладних геометричних задач.

§ 1.1. Про логічну побудову планіметрії. Основні поняття. Аксіоми планіметрії

У навколишньому світі нас оточують різні предмети, кожний з яких має багато характеристик: колір, твердість, хімічний склад, розміри, форму і т. д. Наприклад, круг радіуса 10 см можна вирізати з металевого листа або з аркуша паперу. Зрозуміло, що обидва предмети мають і однакові характерні властивості, і різні. Щоб вивчити певні властивості того чи іншого предмета, у школі вивчаються різні шкільні дисципліни. Якщо порівнювати вищеназвані предмети за формою та кількісними характеристиками, то ці фігури однакові – два круги радіуса 10 см. Шкільні дисципліни, які вивчають просторову форму й кількісні характеристики предметів і явищ навколишнього середовища, належать до математичних – алгебра і геометрія. ***Геометрія*** – це наука про просторову форму й кількісні характеристики предметів реального світу.

Інші характеристики предметів навколишнього середовища вивчають інші шкільні дисципліни. Якщо під час вивчення предмета реального світу не враховувати його характеристики, крім просторової форми і кількісних вимірів, то отримаємо абстрактний об'єкт, який називають геометричною фігурою.

Слово «геометрія» – грецького походження, що в перекладі українською мовою означає *землемірство* (назва походить від вимірювань на місцевості). Геометрія, яку вивчають у школі, називається *евклідовою* за ім'ям давньогрецького вченого Евкліда (див. рубрику «З літопису геометрії» до Модуля 1). Шкільна геометрія складається з двох частин: ***планіметрії*** і ***стереометрії***. З планіметрією ви ознайомилися в основній школі, а стереометрію вивчатимете в старших класах.

Планіметрія – це розділ геометрії, у якому вивчаються геометричні фігури на площині (рис. 1.1). ***Стереометрія*** – це розділ геометрії, у якому вивчаються фігури в просторі.

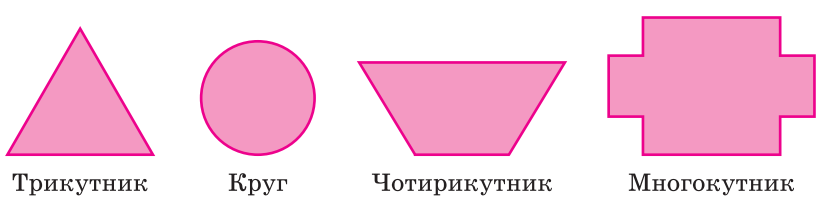


Рис. 1.1

Геометричні фігури – це абстрактні фігури, які нагадують предмети, що нас оточують. Щоб відрізняти одну геометричну фігуру (чи поняття) від іншої, їх описують у вигляді твердження, яке називають *означенням.*

Означення – це твердження, яке описує істотні властивості предмета (поняття), що дає змогу відрізнити його від інших. Як з'ясувалося, означити всі геометричні фігури неможливо. Наприклад, точка, пряма, площина. Їх називають ***неозначуваними***, або ***початковими*** (з яких усе починається), або ***основними***, як називали їх у планіметрії.

Логічну побудову планіметрії можна описати за такими етапами.

1. Вибір геометричних понять, які називають основними поняттями (абстрактних фігур).
2. Формулювання основних властивостей для цих геометричних понять за допомогою тверджень, які вважаються істинними без доведень.
3. Побудова інших понять, які означуються через основні поняття та їхні властивості, та тверджень, істинність яких встановлюється шляхом доведень, опираючись на відомі.

Таку побудову науки називають ***аксіоматичною***. Її назва походить від слова «аксіома». Це слово грецького походження, що в перекладі українською мовою означає *повага*, *авторитет*, *незаперечна істина*. ***Аксіома*** – це твердження, яке приймається істинним без доведення. Основні властивості найпростіших геометричних фігур, які вважають істинними без доведення і які є вихідними під час доведення інших властивостей, називають ***аксіомами геометрії.***

Для шкільного курсу планіметрії визначено:

1. Основні геометричні фігури (поняття) – *точка*, *пряма*.

(*Точка* – найпростіша геометрична фігура. Усі інші геометричні фігури складаються з точок, у тому числі й *пряма*.)

2. Аксіоми планіметрії – це основні властивості найпростіших геометричних фігур.

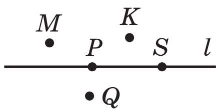
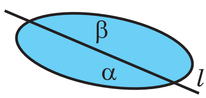
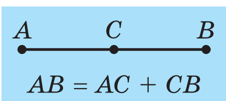
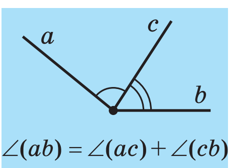
3. Систему означень планіметричних фігур і теорем, що виражають їхні властивості.

До означуваних понять у геометрії відносять поняття відрізка, променя, трикутника тощо, оскільки для них існують пояснення «що це таке?». Означуваних понять багато. Наведемо приклад.

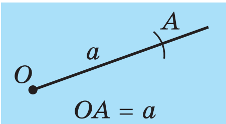
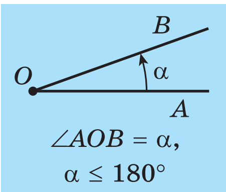
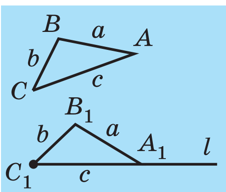
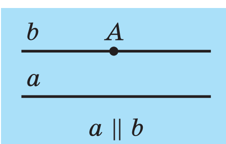
Нехай на прямій a задано дві різні точки A і B. Фігуру, що складається з усіх точок прямої a, які лежать між точками A і B, включаючи точки A і B, називають ***відрізком*** (рис. 1.2). Точки A і B називаються *кінцями* відрізка, а всі інші точки – *внутрішніми точками* відрізка. Таким чином відрізок – означуване поняття.

Рис. 1.2

АКСІОМИ ПЛАНІМЕТРІЇ

№	Назва аксіоми	Зміст аксіоми	Наслідки з аксіом
I	**Аксіоми належності** I_1.  I_2. 	I_1. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй. I_2. Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну	Дві різні прямі або не перетинаються, або перетинаються тільки в одній точці
II	**Аксіоми розміщення** II_1.  II_2. 	II_1. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими. II_2. Пряма розбиває площину на дві півплощини	Якщо кінці будь-якого відрізка належать одній півплощині, то відрізок не перетинає пряму. Якщо кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинає пряму
III	**Аксіоми вимірювання** III_1.  III_2. 	III_1. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою. III_2. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами	Якщо три точки A, B і C лежать на одній прямій, то точка C лежатиме між точками A і B у випадку, коли $AB = AC + CB$. Якщо від даної півпрямої відкласти в одну й ту саму півплощину два кути, то сторона меншого кута, відмінна від даної півпрямої, проходитиме між сторонами більшого кута

Продовження таблиці

№	Назва аксіоми	Зміст аксіоми	Наслідки з аксіом
IV	**Аксіоми відкладання** IV_1.  IV_2.  IV_3. 	IV_1. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини і до того ж тільки один. IV_2. Від будь-якої півпрямої в задану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою 180°, і до того ж тільки один. IV_3. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому, у заданому розміщенні відносно даної півпрямої	Якщо пряма, яка не проходить через жодну з вершин трикутника, перетинає одну з його сторін, то вона перетинає тільки одну з двох інших сторін
V	**Аксіома паралельності** V_1. 	V_1. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більше як одну пряму, паралельну даній	Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу

Щоб установити правильність твердження про властивості тієї чи іншої геометричної фігури, доводиться висловлювати деякі міркування. Серед цих міркувань є такі, які потребують доведення (*теореми*, *задачі*). Твердження, істинність якого встановлюється шляхом доведення і яке використовується для доведення інших тверджень, називають ***теоремою***. Теорема складається з двох частин: *умови* і *висновку*. Для доведення теорем у шкільному курсі геометрії використовують в основному такі методи (див. § 1.3):

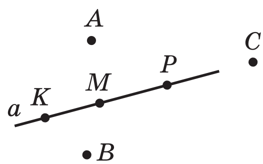
а) по структурі доведення – прямий (аналітичний і синтетичний), від супротивного;

б) по використанню математичного апарату – алгебраїчний, координатний, векторний і т. д.

Усі міркування під час доведення теорем довільним методом опираються на аксіоми та відомі доведені факти. Тобто під час доведення теореми дозволяється користуватися тільки основними властивостями найпростіших фігур (аксіомами) і раніше доведеними властивостями (теоремами). Ніякими іншими властивостями фігур, навіть якщо вони здаються очевидними, користуватися не можна. Наприклад, під час доведення теорем можна користуватися рисунком. Однак це лише геометрична модель змісту тексту, вираженого словами. Тому робити за рисунком висновки про властивості фігур не дозволяється.

Отже, **геометрія, як і інші математичні науки, будується за такою схемою: спочатку потрібно ввести основні поняття, задати аксіоми (*правила гри*), а пізніше, опираючись на аксіоми, виводити інші факти (*проводити гру за визначеними правилами, які є несуперечними між собою*).**

Вправи



1.1°. Виберіть за рисунком два правильні математичні твердження.

А) $A \in a$; Г) $B \notin a$;
Б) $M \notin a$; Д) $C \in a$.
В) $K \notin a$;

1.2°. На одній прямій позначено три точки A, B і C так, що $AB = 2{,}72$ дм, $BC = 1{,}38$ дм і $AC = 1{,}34$ дм. Визначте правильні твердження щодо розміщення однієї точки між двома іншими.

А) $A \in BC$; Б) $B \in AC$; В) $C \in AB$; Г) $C \notin AB$; Д) $B \notin AC$.

1.3°. Відомо, що відрізок AM довший за відрізок BM у 3 рази. Укажіть два математичні твердження, що відповідають тексту задачі.

А) $AM = 3BM$; В) $AM = \frac{1}{3}BM$; Д) $BM = \frac{1}{3}AM$.
Б) $3AM = BM$; Г) $AM + BM = 4AM$;

1.4°. Укажіть два правильні скорочені записи умови задачі: «Відрізок AM коротший за відрізок BM на 2 см».

А) $AM - BM = 2$ см; Г) $AM + 2$ см $= BM$;
Б) $BM - AM = 2$ см; Д) $AM = BM + 2$ см.
В) $AM - 2$ см $= BM$;

1.5°. Знайдіть градусну міру кута AOM, якщо $\angle AOB = 150°$, а $\angle AOM$ у 2 рази більший за $\angle BOM$ (M – внутрішня точка $\angle AOB$).

А) 50°; Б) 100°; В) 75°; Г) 30°; Д) 120°.

1.6°. Знайдіть довжини відрізків AM і BM ($M \in AB$), якщо довжина відрізка AB дорівнює 12 см, а відрізок AM коротший за відрізок BM на 3 см.

А) 1,5 см і 4,5 см; В) 7,5 см і 10,5 см; Д) 5 см і 7 см.
Б) 4,5 см і 7,5 см; Г) 6 см і 9 см;

1.7°°. На одній прямій позначили 21 точку так, що відстань між будь-якими двома сусідніми точками дорівнює 3 см. Знайдіть відстань між крайніми точками.

А) 63 см; Б) 60 см; В) 66 см; Г) 57 см; Д) 54 см.

1.8°°. На відрізку AB завдовжки 42 см позначено точку M відповідно до умов (А–Д). Доберіть до кожної з них правильні твердження (1–6).

А) $AM > BM$ на 2 см;
Б) $AM < BM$ на 6 см;
В) $2AM = BM$;
Г) $AM : BM = 3 : 4$;
Д) $0{,}5BM = AM$.

1) $AM = 18$ см;
2) $BM = 28$ см;
3) $AM = 22$ см;
4) $BM = 24$ см;
5) $AM = 14$ см;
6) $BM = 20$ см.

А		
Б		
В		
Г		
Д		

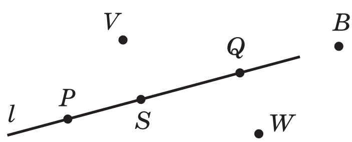
1.9°°. Промінь OA проходить між сторонами кута POM, градусна міра якого дорівнює 160°. Доберіть до кожної умови (А–Д) правильні твердження (1–6).

А) $\angle POA > \angle AOM$ на 40°;
Б) $\angle POA < \angle AOM$ на 60°;
В) $\angle AOM = 0{,}6\angle POA$;
Г) $\angle POA = 3\angle AOM$;
Д) $\angle AOM : \angle POA = 3 : 5$.

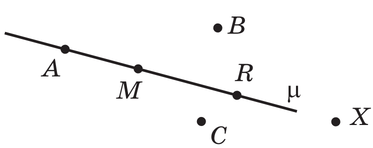
1) $\angle AOM = 110°$;
2) $\angle POA = 120°$;
3) $\angle AOM = 60°$;
4) $\angle POA = 100°$;
5) $\angle AOM = 40°$;
6) $\angle POA = 50°$.

А		
Б		
В		
Г		
Д		

1.10°°. Складіть кілька правильних математичних тверджень до кожного з рисунків.



1)



2)

1.11°°. На промені OX відкладено два відрізки: $OA = 7{,}3$ см і $OB = 5{,}8$ см. Визначте довжину відрізка AB.

1.12•. Визначте, яка з трьох точок: A, B, M – лежить між двома іншими.

1) $AM = 3$ см, $AB = 8$ см, $BM = 5$ см;
2) $AM = 7$ см, $BM = 12$ см, $AB = 19$ см;
3) $AM = 27$ см, $BM = 5$ см, $AB = 22$ см;
4) $AM = 9$ см, $BM = 21$ см, $AB = 12$ см;
5) $AM = 21$ см, $BM = 37$ см, $AB = 16$ см;
6) $BM = 18$ см, $AM = 33$ см, $AB = 15$ см.

1.13•. Визначте довжину відрізка KM, якщо точка O розділяє відрізок AB на два відрізки завдовжки 18 см і 14 см, а точки K і M – середини відрізків AO і OB.

1.14•. На відрізку AB завдовжки 48 см позначено точку O. Знайдіть довжини відрізків AO і OB, якщо $AO : OB = 3 : 5$.

1.15•. Знайдіть довжину відрізка MB, якщо точки A, B, C і M лежать на одній прямій, причому $AC = 12$ см, $CB = 5$ см, а M – середина відрізка AC.

1.16•. Промінь OM проходить між сторонами $\angle KOC$, градусна міра якого дорівнює $153°$. Знайдіть кути KOM і MOC, коли відомо, що $\angle KOM$ у 2 рази більший за $\angle MOC$.

1.17•. На відрізку AB завдовжки 75 см позначено дві точки M і K ($M \in AK$, $K \in MB$) так, що відрізок AM на 5 см довший за відрізок MK, а відрізок KB у 2 рази довший за відрізок AM. Знайдіть довжини п'яти утворених відрізків.

1.18••. Промінь, що лежить між сторонами кута, розбиває його на два кути. Доведіть, що бісектриси цих кутів утворюють кут удвічі менший від величини заданого кута.

1.19••. Дано чотири прямі a, b, c і d, причому кожні три з них перетинаються в одній точці. Доведіть, що всі чотири прямі проходять через одну точку.

§ 1.2. Опорні факти курсу планіметрії

Даний параграф призначається для повторення курсу планіметрії. Потреба в ньому зумовлена тим, що багато питань курсу планіметрії на першому етапі навчання у школі розглядаються дещо поверхнево. І хоч у наступних класах рівень вивчення матеріалу підвищується, не завжди вдається повернутися і поглибити раніше вивчені теми. У даному пункті систематизовано та узагальнено основні відомості з планіметрії, які умовно розбиті на блоки: взаємне розміщення прямих на площині; коло і круг; многокутники; трикутник і його елементи; опуклі чотирикутники.

Взаємне розміщення прямих на площині

Дві прямі на площині можуть перетинатися лише в одній точці або не перетинатися, тобто бути паралельними. При перетині двох прямих утворюються ***суміжні*** і ***вертикальні*** кути. Суміжні кути доповнюють один одного до 180°, а вертикальні – рівні. Менший з них називається ***кутом між прямими***. На рисунку 1.3 зображено дві прямі AD і BC, які перетинаються в точці O, утворюючи суміжні та вертикальні кути:

1) $\angle COD$ та $\angle AOB$, $\angle AOC$ та $\angle BOD$ – вертикальні;

2) $\angle AOC$ та $\angle COD$, $\angle COD$ та $\angle DOB$, $\angle AOB$ та $\angle AOC$, $\angle AOB$ та $\angle BOD$ – суміжні.

Якщо один з кутів при перетині двох прямих дорівнює 90°, то всі інші – суміжні та вертикальні кути – також дорівнюють 90°. Такі прямі називають ***взаємно перпендикулярними***. Записують, наприклад, $AD \perp BC$ або $a \perp b$.

Відстанню від точки A до прямої a (рис. 1.4) називають довжину відрізка OA, перпендикулярного до прямої a, де точка O – ***основа перпендикуляра***. Відстань від точки A до будь-якої точки прямої a, відмінної від точки O, більша за відстань від точки A до прямої a. Тобто будь-який відрізок AX, де X – точка прямої a, відмінна від точки O, довший за відрізок AO.

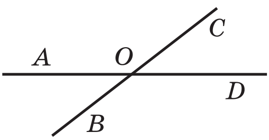


Рис. 1.3

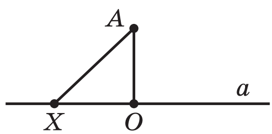


Рис. 1.4

Дві різні прямі a і b, які лежать в одній площині, називаються *паралельними*, якщо вони не мають жодної спільної точки. Коротко записують $a \parallel b$. Якщо прямі не паралельні ($a \nparallel b$), то вони перетинаються ($a \cap b = A$).

Унаслідок перетину двох прямих третьою прямою утворюються вісім кутів (рис. 1.5) (прямі a і b можуть перетинатися, але пряма c через їхню точку перетину не проходить):

- внутрішні односторонні (кути *4* і *5*, *3* і *6*);
- внутрішні різносторонні (кути *3* і *5*, *4* і *6*);
- зовнішні односторонні (кути *1* і *8*, *2* і *7*);
- зовнішні різносторонні (кути *1* і *7*, *2* і *8*);
- відповідні кути (кути *1* і *5*, *2* і *6*, *8* і *4*, *7* і *3*).

Ознаки паралельності прямих:

1) Якщо при перетині двох прямих a і b третьою прямою внутрішні (або зовнішні) різносторонні кути рівні або внутрішні односторонні в сумі становлять 180°, то a і b – паралельні.

2) Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою.

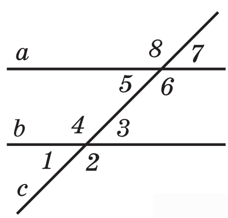


Рис. 1.5

Теорема Фалеса.
Якщо на одній стороні кута відкласти кілька рівних відрізків і через їхні кінці провести паралельні прямі, що перетинають другу сторону кута, то вони відітнуть на другій стороні теж рівні відрізки. Наприклад, якщо $AA_1 \parallel BB_1$, причому $OA = AB$, то $OA_1 = A_1B_1$ (рис. 1.6).

Коло і круг

Круг і коло ми зустрічаємо повсюди. ***Кругом*** з центром O і радіусом R називають фігуру, яка утворена всіма точками площини, які віддалені від точки O на відстань, не більшу за R. **Круг обмежений колом.** ***Колом*** із центром O і радіусом R називають множину точок площини, віддалених від точки O на відстань, що дорівнює R (рис. 1.7, *а*). Відрізки, що з'єднують центр з точками кола та мають довжину R, називають ***радіусами*** кола (круга).

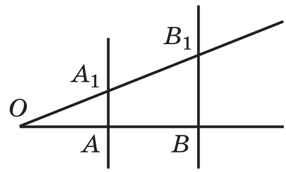


Рис. 1.6

Частини круга, на які він ділиться двома радіусами, називають ***круговими секторами*** (рис. 1.7, б).

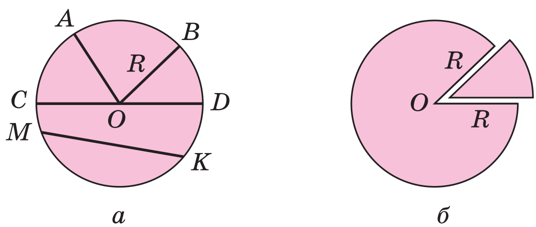


Рис. 1.7

Хорда – відрізок, що з'єднує дві точки кола (MK), ділить круг на два ***сегменти***, а коло – на дві дуги. ***Діаметр*** – найбільша хорда кола (CD).

Через три точки, що не лежать на одній прямій, проходить єдине коло. Діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить навпіл цю хорду і обидві дуги, які стягуються нею, і навпаки, якщо діаметр проведено через середину хорди, то він перпендикулярний до неї і ділить навпіл дугу, яку стягує ця хорда (рис. 1.8, *а*).

Дуги, що містяться між паралельними хордами, рівні між собою. Рівні дуги стягуються рівними хордами, і навпаки, рівні хорди стягують рівні дуги.

Рівні хорди однаково віддалені від центра, і навпаки, хорди, однаково віддалені від центра, рівні між собою. Більша з двох хорд менше віддалена від центра, і навпаки, з двох хорд більша та, яка менше віддалена від центра (рис. 1.8, *а*).

Яке розміщення може мати пряма з колом?

Розглянемо коло із центром O і пряму l (рис. 1.8, *б*). З точки O проведемо перпендикуляр до прямої l. Нехай A – основа цього перпендикуляра. Можливі три випадки: точка A міститься поза колом (A_3), на колі (A_2) і всередині кола (A_1). У кожному із цих випадків коло і пряма l або не мають спільних точок, або мають одну спільну точку A_2 (l_2 – *дотична до кола*), або мають дві спільні точки (l_1 – *січна*).

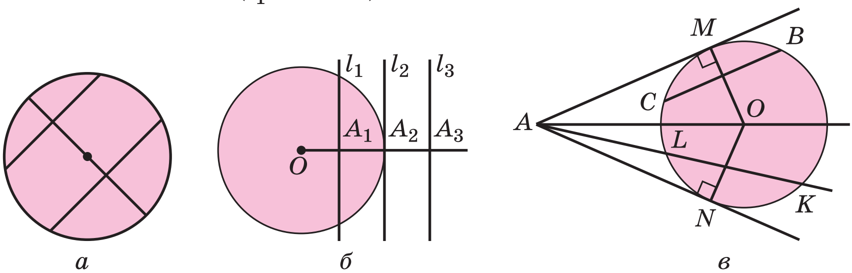


Рис. 1.8

Пряма, що проходить через точку кола, є **дотичною до кола** тоді і тільки тоді, коли вона перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку. Якщо дотична паралельна хорді кола, то точка дотику ділить навпіл дугу, яку стягує хорда (рис. 1.8, *в*; $AM \parallel CB$, $\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{MB}$).

Якщо з однієї точки до кола проведено дві дотичні, то відрізки цих дотичних (від точок дотику до даної точки) рівні між собою, а промінь, проведений через дану точку і центр кола, ділить навпіл кут між дотичними (рис. 1.8, *в*; $AM = AN$, $\angle MAO = \angle OAN$).

Вписаним кутом у коло називають кут, утворений двома хордами, що виходять з однієї точки на колі (рис. 1.9). Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається. Вписані кути, що спираються на одну дугу, між собою рівні. Вписаний кут, що спирається на півколо (на діаметр), – прямий.

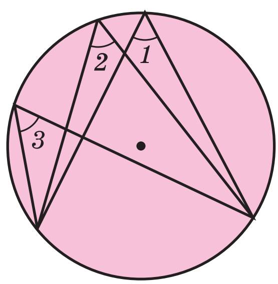


Рис. 1.9

Кут з вершиною у центрі кола називається ***центральним кутом***. Центральний кут, сторони якого перетинають коло в тих самих точках, що і вписаний, називається відповідним центральним кутом до вписаного (рис. 1.10). Міра ***вписаного*** кута дорівнює половині міри відповідного центрального або доповнює його половину до 180°. Кут, утворений хордою і дотичною, яка проходить через кінець хорди, вимірюється половиною дуги, що міститься між сторонами цього кута (рис. 1.11); $\angle MAN = \frac{1}{2}\overset{\frown}{MA}$. Кут, утворений двома хордами, що перетинаються всередині кола, вимірюється півсумою двох дуг, одна з яких міститься між сторонами цього кута, а друга – між продовженнями цих сторін.

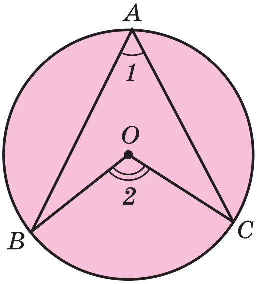


Рис. 1.10

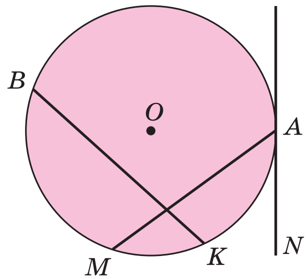


Рис. 1.11

Кут, утворений двома дотичними, називається ***описаним*** (рис. 1.8, *в*; $\angle MAN$). Описаний кут вимірюється піврізницею двох дуг, що містяться між його сторонами $\left(\angle MAN = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{MBN} - \overset{\frown}{MCN})\right)$.

Довжину кола знаходять за формулою: $C = \pi d = 2\pi R$, де d – діаметр кола, R – радіус кола, а довжину дуги кола – за формулою: $l = \frac{\pi R\alpha}{180}$, де α – градусна міра відповідного центрального кута. Площа круга: $S = \pi R^2 = \frac{CR}{2}$, площа кругового сектора: $S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha$, де R – радіус круга, α – градусна міра відповідного центрального кута. Площа сегмента: $S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha \pm S_{\triangle}$, де α – градусна міра центрального кута, який містить дугу цього кругового сегмента, а $S_{\triangle}$ – площа трикутника з вершинами в центрі круга та на кінцях радіусів, що обмежують відповідний сектор. Знак «–» треба брати, коли $\alpha < 180°$, а знак « + » – коли $\alpha > 180°$.

Многокутники

Многокутником називається проста замкнена ламана. Наприклад, ***многокутником*** $A_1A_2...A_n$ називається лінія, яку отримують при послідовному сполученні n різних точок A_1, A_2, ..., A_n відрізками так, щоб кожна точка була сполучена з наступною, а остання з першою (рис. 1.12). Розрізняють многокутники плоскі й неплоскі. ***Плоский многокутник*** – частина площини, обмежена многокутником.

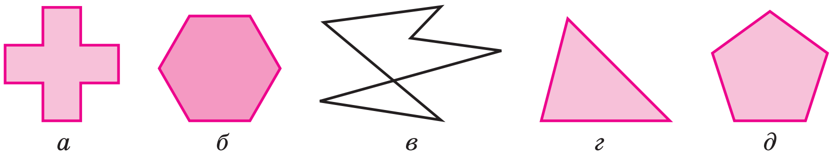


Рис. 1.12

Многокутник може бути опуклий або не опуклий. Многокутник ***опуклий***, якщо він лежить в одній півплощині відносно кожної прямої, що проходить через дві його сусідні вершини (рис. 1.12, *б*, *г*, *д*).

Многокутники називають ***рівними***, якщо вони при накладанні суміщаються. Для опуклого n-кутника сума внутрішніх кутів дорівнює $180°(n - 2)$, а кількість діагоналей будь-якого n-кутника дорівнює $\frac{n(n-3)}{2}$. Якщо всі сторони опуклого многокутника рівні між собою і всі кути теж рівні між собою, то його називають ***правильним*** (рис. 1.12, *д*). Якщо всі вершини многокутника лежать на деякому колі, то він називається ***вписаним*** у це коло (рис. 1.13, *а*). Якщо всі сторони многокутника дотикаються до деякого кола, то він називається ***описаним навколо кола*** (рис. 1.13, *б*). За кількістю сторін n-кутника йому дають назву. Наприклад, трикутник ($n = 3$), чотирикутник ($n = 4$), п’ятикутник ($n = 5$) і т. д.

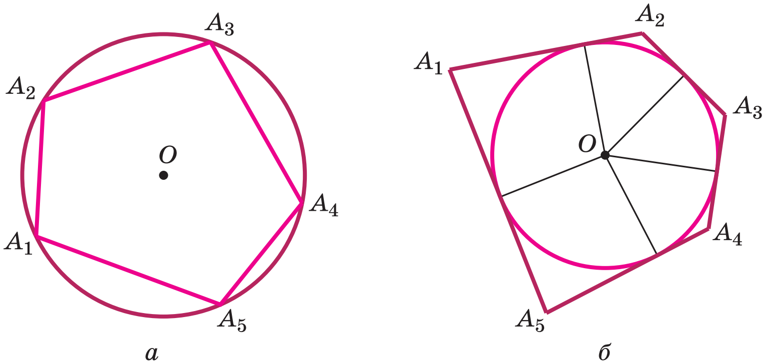


Рис. 1.13

Як побудувати правильний n-кутник?

Якщо коло поділити на n рівних частин і точки послідовно сполучити відрізками, то дістанемо правильний n-кутник, вписаний у коло (рис. 1.14).

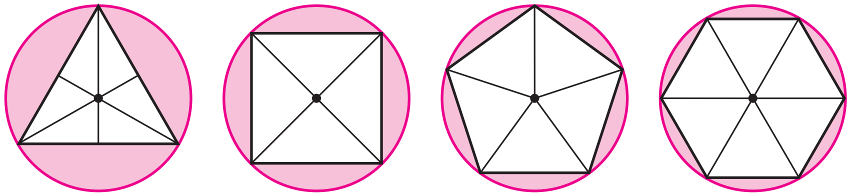


Рис. 1.14

Якщо коло поділити на n рівних частин і через точки поділу провести дотичні до кола, то відрізки цих дотичних утворять правильний n-кутник, описаний навколо кола (рис. 1.15).

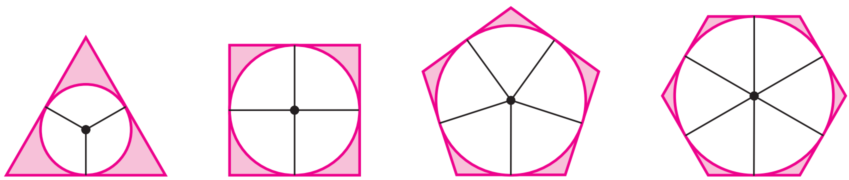


Рис. 1.15

Навколо кожного правильного многокутника можна описати коло або в кожний правильний многокутник можна вписати коло.

У правильному многокутнику центри описаного і вписаного кіл збігаються. Спільний центр описаного і вписаного кіл називається *центром* правильного многокутника. Радіус вписаного кола називають *апофемою* правильного многокутника.

Кут, утворений двома радіусами, проведеними через суміжні вершини правильного многокутника, називається його *центральним кутом*. Усі центральні кути правильного многокутника рівні між собою, вони дорівнюють $\frac{360^\circ}{n}$, де n – кількість сторін (кутів) многокутника.

У правильному n-кутнику, як і в довільному n-кутнику, сума всіх кутів (внутрішніх) становить $180^\circ(n-2)$. Тому кожний його кут визначається за формулою $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$.

Коло, вписане в правильний многокутник, дотикається до його сторін в їхніх серединах. Центр кола, вписаного в правильний многокутник, є точкою перетину серединних перпендикулярів до його сторін (рис. 1.15).

Якщо сторона правильного многокутника дорівнює a, радіус вписаного в нього кола – r, а радіус описаного навколо нього кола – R, то між ними існує взаємозв'язок, що виражається формулами:

$$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}},\ R = \frac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}.$$

Якщо $n = 3$ (правильний трикутник), то:

$$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}60^\circ} = \frac{a}{2\sqrt{3}},\ R = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Якщо $n = 4$ (правильний чотирикутник), то:

$$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}45^\circ} = \frac{a}{2},\ R = \frac{a}{2\sin 45^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Якщо $n = 6$ (правильний шестикутник), то:

$$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}30^\circ} = \frac{a}{2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ R = \frac{a}{2\sin 30^\circ} = a.$$

Найпростішим многокутником є трикутник. У будь-який трикутник можна вписати коло, причому тільки одне. На рисунку 1.16, *а* зображено коло із центром O, вписане в трикутник ABC, $r = OM$ – його радіус. Центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його бісектрис і знаходиться всередині трикутника. Оскільки площу трикутника знаходять за формулою $S_\triangle = pr$, де p – півпериметр трикутника, то звідси $r = \dfrac{S_\triangle}{p} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, де a, b, c – сторони трикутника. Центр кола, вписаного в трикутник, рівновіддалений від його сторін.

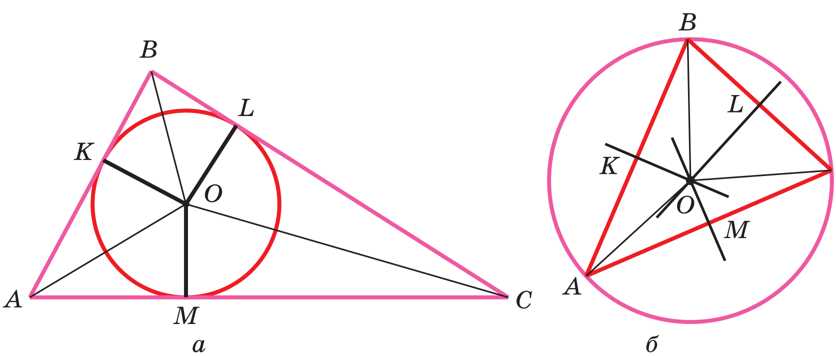


Рис. 1.16

Чи можна в будь-який чотирикутник вписати коло?

Відповідь. Не можна. У чотирикутник можна вписати коло за умови, що суми довжин його протилежних сторін рівні.

Навколо довільного трикутника можна описати коло, причому тільки одне (рис. 1.16, *б*). Центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів, проведених до його сторін. Центр кола O, описаного навколо трикутника ABC, рівновіддалений від його вершин.

На рисунку 1.16, *б* зображено коло із центром O, описане навколо трикутника ABC, $R = OA$ – його радіус. Якщо радіус описаного кола R, сторони трикутника, вписаного в коло, a, b і c, то $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$, де p – півпериметр трикутника.

Чи можна описати коло навколо довільного чотирикутника?

Відповідь. Не можна. Навколо чотирикутника можна описати коло тільки тоді, коли суми протилежних кутів дорівнюють $180°$.

Трикутник і його елементи

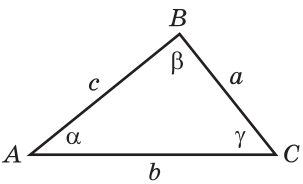


Рис. 1.17

Трикутником називається фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, що попарно сполучають ці точки. Розглянемо $\triangle ABC$ (рис. 1.17), у якому виділяють шість основних елементів: три внутрішні кути α, β, γ і три відповідно протилежні їм сторони a, b, c.

Трикутник називається ***тупокутним***, ***прямокутним*** або ***гострокутним***, якщо його найбільший внутрішній кут відповідно більший, дорівнює або менший за $90°$.

Трикутник називається ***рівнобедреним***, якщо в нього дві сторони рівні (бічні сторони). Основою рівнобедреного трикутника є та сторона, яка не дорівнює жодній з інших двох рівних сторін.

Трикутник, усі сторони якого рівні, називається ***рівностороннім***, або ***правильним***.

Співвідношення між сторонами і кутами трикутника:

– проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки;

– проти рівних сторін лежать рівні кути;

– теорема синусів: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$;

– теорема косинусів: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ (квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними).

Трикутник можна визначити будь-якою трійкою таких основних елементів: або двома сторонами і кутом між ними, або однією стороною і двома кутами, або трьома сторонами. Наприклад, $\triangle ABC$ зі сторонами a, b, c можна задати так:

1) a, b і C; b, c і A; a, c і B;

2) a, B і C; b, A і C; c, A і B;

3) a, b і c.

Співвідношення між внутрішніми і зовнішніми кутами трикутника: будь-який зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.

З трьох відрізків можна утворити трикутник тоді і тільки тоді, коли будь-яка його сторона більша за суму і менша за різницю двох інших його сторін. У будь-якому трикутнику можна провести три медіани, три бісектриси і три висоти.

Властивості бісектриси кута трикутника: *бісектриси* трикутника перетинаються в одній точці, яка лежить усередині трикутника і є центром вписаного в трикутник кола. Бісектриса ділить протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим до неї сторонам (рис. 1.18; BL – бісектриса, $AL : LC = AB : BC$).

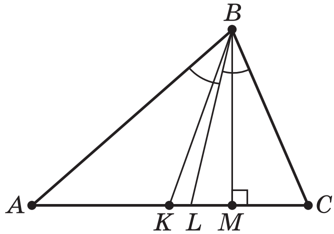


Рис. 1.18

Основні властивості медіан трикутника:

1. Медіани трикутника перетинаються в одній точці, що лежить усередині трикутника.

2. Медіани трикутника точкою їхнього перетину діляться у відношенні 2 : 1 (рахуючи від вершин трикутника).

3. Медіана ділить трикутник на два трикутники, площі яких рівні (рис. 1.18; BK – медіана, $S_{\triangle ABK} = S_{\triangle KBC}$).

4. Три медіани трикутника ділять трикутник на шість трикутників, площі яких рівні.

Прямі, на яких лежать ***висоти*** трикутника, перетинаються в одній точці – ***ортоцентрі*** трикутника, яка може міститися у внутрішній або зовнішній області трикутника. Висоти трикутника, проведені до сторін трикутника a, b і c, позначаються h_a, h_b і h_c відповідно. Висота трикутника h_a визначається через сторони трикутника за формулою:

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a},$$

де $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Медіана трикутника m_a, проведена до сторони a, визначається через сторони трикутника за формулою:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

У кожному трикутнику можна побудувати три ***середні лінії*** – відрізки, які сполучають середини двох сторін трикутника. Середня лінія трикутника паралельна третій стороні трикутника та дорівнює її половині. Середня лінія трикутника відтинає від трикутника подібний трикутник. Площа меншого трикутника відноситься до площі основного трикутника як 1 : 4.

Властивості рівнобедреного трикутника: кути при основі трикутника рівні; висота, проведена до основи, є також бісектрисою і медіаною.

Властивості рівностороннього трикутника: усі кути рівні (кожний кут дорівнює 60°); кожна з трьох його висот є також бісектрисою і медіаною; центр кола, описаного навколо трикутника, збігається із центром кола, вписаного в нього.

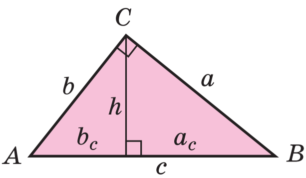


Рис. 1.19

Прямокутний трикутник має сторону, яка лежить проти прямого кута, – ***гіпотенузу*** (c) та дві сторони, які утворюють прямий кут, – ***катети*** (a і b) (рис. 1.19). Сторони прямокутного трикутника a, b і c (c – гіпотенуза) зв'язані між собою співвідношенням, що називається теоремою Піфагора: $c^2 = a^2 + b^2$. Воно читається так: ***квадрат довжини гіпотенузи дорівнює сумі квадратів довжин катетів.***

Властивості прямокутного трикутника:

1) Катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу: $b^2 = b_c \cdot c$ і $a^2 = a_c \cdot c$ (рис. 1.19).

2) Висота, проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу: $h^2 = b_c \cdot a_c$.

3) Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, лежить на середині гіпотенузи.

4) Для сторін прямокутного трикутника істинні відношення: $\sin A = \dfrac{CB}{AB}$, $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$.

Запам'ятайте!

α	30°	45°	60°	***Вказівка для кращого запам'ятовування***: 1) запишіть риски дробів для кожного значення виразу $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ та знаменники, що дорівнюють 2; 2) запишіть у чисельниках числа: 1, 2, 3 (для $\sin\alpha$) і, навпаки: 3, 2, 1 (для $\cos\alpha$); 3) допишіть знак радикала до кожного чисельника дробу. Враховуючи те, що $\sqrt{1} = 1$, отримуємо заповнену таблицю
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Опуклі чотирикутники

Чотирикутник, протилежні сторони якого попарно паралельні, називається ***паралелограмом***.

Властивості паралелограма:

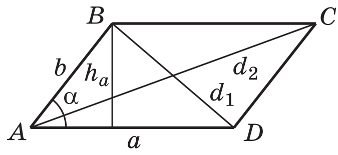


Рис. 1.20

1) Середина діагоналі паралелограма є його центром симетрії.

2) Протилежні сторони паралелограма рівні.

3) Протилежні кути паралелограма рівні.

4) Кожна діагональ паралелограма ділить його на два рівні трикутники.

5) Діагоналі паралелограма діляться точкою перетину навпіл.

6) Сума квадратів діагоналей паралелограма (d_1 і d_2) дорівнює сумі квадратів усіх його сторін:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Щоб довести, що деякий заданий чотирикутник є паралелограмом, треба, згідно з означенням, переконатися в паралельності його протилежних сторін. Інколи такі міркування є громіздкими, а інколи – зайвими. Існують інші доведені ознаки, на підставі яких можна стверджувати, що даний чотирикутник є справді паралелограмом.

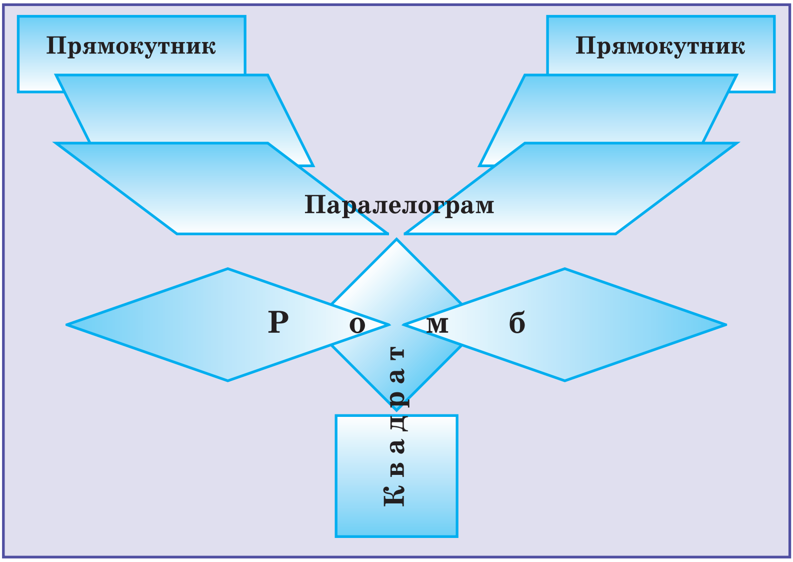
Якщо в чотирикутнику справджується будь-яка з таких умов: 1) протилежні сторони попарно рівні; 2) дві протилежні сторони рівні і паралельні; 3) протилежні кути попарно рівні; 4) діагоналі в точці перетину діляться навпіл, то такий чотирикутник є паралелограмом.

Прямокутник – це паралелограм, у якому всі кути рівні. Оскільки сума кутів чотирикутника дорівнює $180°(4 - 2) = 360°$, то в прямокутнику всі кути прямі. Прямокутник має всі властивості паралелограма. Крім того, він має ще одну властивість: ***діагоналі прямокутника рівні між собою***.

Для прямокутника справджується і обернена теорема про те, що коли в паралелограмі діагоналі рівні, то такий паралелограм є прямокутником. Ця теорема є ознакою прямокутника.

Ромб **–** це паралелограм, у якому всі сторони рівні. Крім загальних властивостей паралелограма, ромб має ще й інші властивості, характерні лише для нього.

Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні і ділять його кути навпіл. Справджується і обернена теорема, яка є ознакою ромба: якщо в паралелограмі діагоналі взаємно перпендикулярні або якщо в ньому діагоналі ділять кути навпіл, то такий паралелограм – ромб.



Квадрат – це паралелограм, у якому всі кути рівні і всі сторони рівні. Отже, квадрат – це прямокутник з рівними сторонами або квадрат – це ромб з рівними кутами (прямими). Очевидно, що квадрат має всі властивості прямокутника і ромба.

Трапеція – це чотирикутник, у якому тільки дві протилежні сторони паралельні. Ці паралельні сторони називаються ***основами*** трапеції, дві інші сторони – ***бічними сторонами***.

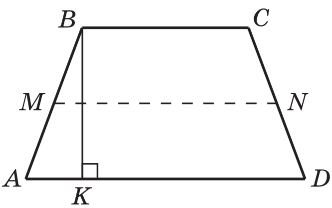


Рис. 1.21

Якщо бічні сторони трапеції рівні між собою, то таку трапецію називають ***рівнобічною*** (рис. 1.21, $AB = CD$).

Рівнобічна трапеція має такі властивості:

1) Кути, прилеглі до основи рівнобічної трапеції, рівні. Справджується і обернене твердження: якщо кути, прилеглі до основи трапеції, рівні, то така трапеція рівнобічна.

2) Діагоналі рівнобічної трапеції рівні.

3) Сума протилежних кутів рівнобічної трапеції дорівнює $180°$.

Відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції, називається її ***середньою лінією*** (рис. 1.21, MN – середня лінія, $AM = MB$, $CN = ND$).

Середня лінія трапеції паралельна її основам і дорівнює їхній півсумі (рис. 1.21, $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \dfrac{BC + AD}{2}$).

Вправи

1.20°. При перетині прямих a і b утворилося чотири кути (рис. 1.22, *а*). Задайте кожній з умов (А–Д) можливий наслідок (1–5).

А) $\angle 1 = \angle 3$;
Б) $\angle 2 + \angle 3 = 180°$;
В) $\angle 1 = \angle 2 = 90°$;
Г) $\angle 2 + \angle 4 = 260°$;
Д) $\angle 3 = 90°$.

1) $\angle 3 = \angle 4 = 90°$;
2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = 90°$;
3) $\angle 1$ і $\angle 4$ – суміжні;
4) $\angle 1$ і $\angle 3$ – гострі;
5) $\angle 2$ і $\angle 4$ – вертикальні.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

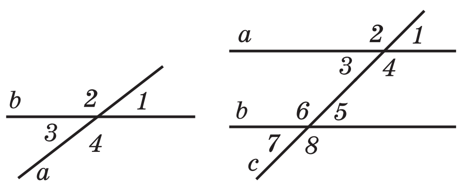
1.21°. Умовами (1–7) указано градусну міру деяких кутів. Виберіть серед них ті, які можуть бути суміжними.

1) 18°; 2) 72°; 3) 128°; 4) 62°; 5) 28°; 6) 108°; 7) 38°.

А) 1 і 2; Б) 2 і 6; В) 3 і 4; Г) 1 і 7; Д) 2 і 5.

1.22°. Виберіть правильний висновок, коли відомо, що $\angle 1 = \angle 7$ (рис. 1.22, *б*).

А) $a \parallel b$; Б) $a \perp b$; В) $a \cap b$.



а *б*

Рис. 1.22

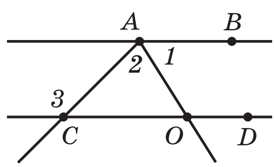


Рис. 1.23

1.23°°. Знайдіть градусну міру $\angle 3$ (рис. 1.23), якщо $CD \parallel AB$, $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 2 = 72°$.

А) 72°; Б) 144°; В) 108°; Г) 36°; Д) 124°.

1.24°. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута KMN трикутника KMZ (рис. 1.24).

А) 135°; В) 108°; Д) 45°.
Б) 125°; Г) 117°;

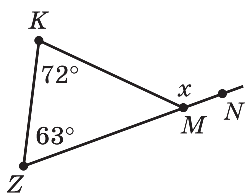


Рис. 1.24

1.25°. Знайдіть градусну міру кута між бісектрисою кута при вершині рівнобедреного трикутника та його бічною стороною, якщо кути трикутника ABC відносяться як 3 : 4 : 3.

А) 18°; Б) 36°; В) 72°; Г) 60°; Д) 30°.

1.26°. Визначте правильні рівності (рис. 1.25).

А) $\triangle ABO = \triangle OCD$; В) $BA = CD$; Д) $\angle BAO = \angle DCO$;
Б) $\triangle AOB = \triangle COD$; Г) $\angle AOB = \angle DOC$; Е) $\angle BAO = \angle CDO$.

1.27°. Знайдіть кути трикутника BOC (рис. 1.26).

А) 48°, 48°, 84°; В) 24°, 132°, 24°; Д) 48°, 132°, 20°.
Б) 132°, 48°, 48°; Г) 42°, 90°, 48°;

1.28°. Ідентифікуйте кожному шестикутнику периметра P коло радіуса R, описане навколо нього.

А) $P = 42$ см; 1) $R = 2$ см;
Б) $P = 12$ см; 2) $R = 8$ см;
В) $P = 84$ см; 3) $R = 6$ см;
Г) $P = 48$ см; 4) $R = 14$ см;
Д) $P = 36$ см. 5) $R = 7$ см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

1.29°. Обчисліть периметр трикутника з вершинами в центрах трьох кіл з радіусами 6 см, 7 см і 8 см, що попарно дотикаються зовні (рис. 1.27).

А) 28 см; Б) 29 см; В) 27 см; Г) 42 см; Д) 21 см.

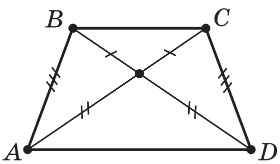


Рис. 1.25

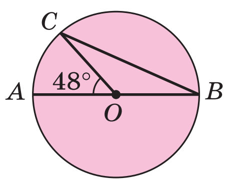


Рис. 1.26

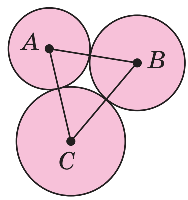


Рис. 1.27

1.30°. Виберіть вирази, якими визначаються радіус вписаного кола в правильний трикутник зі стороною a та радіус описаного навколо нього кола:

1) $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; 2) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; 3) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; 4) $\dfrac{a}{2}$; 5) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

А) 1 і 2; Б) 2 і 3; В) 3 і 4; Г) 4 і 5; Д) 1 і 5.

1.31°. Знайдіть діаметр кола, якщо пряма a є дотичною до нього, A – точка дотику, $OB = 12$ см та утворює з дотичною кут 30° (рис. 1.28).

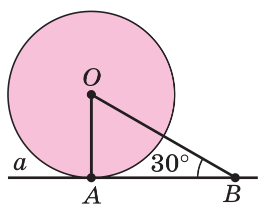


Рис. 1.28

А) 24 см; Б) 12 см; В) 6 см; Г) 18 см; Д) 4 см.

1.32°. Сторона квадрата дорівнює $20\sqrt{2}$ см. Укажіть довжину радіуса кола, вписаного в цей квадрат.

А) 20 см; Б) $10\sqrt{2}$ см; В) 10 см; Г) $5\sqrt{2}$ см; Д) 5 см.

1.33°. Одна з основ трапеції на 8 см більша за іншу, а середня лінія трапеції дорівнює 10 см. Знайдіть меншу основу трапеції.

А) 2 см; Б) 4 см; В) 6 см; Г) 8 см; Д) 10 см.

1.34°. Обчисліть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 10 см і 36 см.

А) 90 см^2; Б) 92 см^2; В) 180 см^2; Г) 184 см^2; Д) 360 см^2.

1.35°°. Знайдіть кут між прямими a і b, якщо прямі m і n паралельні (рис. 1.29).

А) 50°; Б) 80°; В) 100°; Г) 65°; Д) 115°.

1.36°°. Визначте довжини радіусів двох кіл, що дотикаються зовні, якщо відстань між їхніми центрами 18 см, а довжина одного з них становить 50 % довжини іншого.

А) 9 см і 6 см; В) 12 см і 6 см; Д) 24 см і 12 см.
Б) 10 см і 8 см; Г) 14 см і 4 см;

1.37°°. Укажіть вираз, що визначає довжину кола, яке обмежує круг площею 9π см^2.

А) 3π см; Б) 9π см; В) 12π см; Г) 18π см; Д) 6π см.

1.38°°. Знайдіть площу круга, вписаного у квадрат зі стороною 6 см.

А) 9π см^2; В) 36π см^2; Д) 18π см^2.
Б) 144π см^2; Г) 72π см^2;

1.39°°. Знайдіть площу трикутника (рис. 1.30) (довжини відрізків наведені в сантиметрах).

А) 6 см^2; Б) 9 см^2; В) 12 см^2; Г) 24 см^2; Д) 30 см^2.

1.40°°. Визначте периметр рівнобедреного трикутника, якщо точка дотику вписаного в нього кола ділить його бічну сторону на відрізки 6 см і 5 см. Виберіть правильну комбінацію можливих відповідей.

1) 21 см; 2) 32 см; 3) 23 см; 4) 34 см; 5) 33 см.
А) 1 або 2; Б) 2 або 4; В) 2 або 3; Г) 3 або 5; Д) 4 або 5.

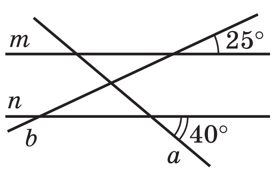


Рис. 1.29

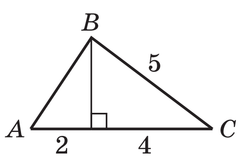


Рис. 1.30

1.41°°. Знайдіть сторону BC трикутника ABC, вписаного в коло радіуса R (рис. 1.31).

А) R; Б) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$; В) $R\sqrt{2}$; Г) $R\sqrt{3}$; Д) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

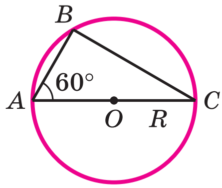


Рис. 1.31

1.42°°. Ідентифікуйте парами сторону правильного трикутника a та радіус r вписаного в нього кола.

А) $a = 18$ см;
Б) $a = 9\sqrt{3}$ см;
В) $a = 30$ см;
Г) $a = 24$ см;
Д) $a = 15\sqrt{3}$ см.

1) $r = 4\sqrt{3}$ см;
2) $r = 7{,}5$ см;
3) $r = 4{,}5$ см;
4) $r = 3\sqrt{3}$ см;
5) $r = 5\sqrt{3}$ см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

1.43°°. Радіус кола, вписаного в квадрат, дорівнює 5 см. Знайдіть діагональ квадрата.

А) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ см; Б) $5\sqrt{2}$ см; В) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ см; Г) $10\sqrt{2}$ см; Д) $20\sqrt{3}$ см.

1.44°°. На рисунку 1.32 зображено два трикутники ABC і CDM, сторони яких AB і MD – паралельні. Знайдіть довжину відрізка AD, якщо $MD = \frac{1}{3}AB$, $CD = 1{,}5$ см.

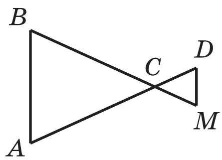


Рис. 1.32

А) 3 см; В) 6 см; Д) 9 см.
Б) 4,5 см; Г) 7,5 см;

1.45°°. Укажіть кількість сторін правильного многокутника, внутрішній кут якого дорівнює 160°.

А) 12; Б) 14; В) 16; Г) 18; Д) 20.

1.46°°. Знайдіть периметр ромба, діагоналі якого дорівнюють 24 см і 18 см.

А) 120 см; Б) 60 см; В) 84 см; Г) 108 см; Д) 144 см.

1.47°°. Відомо, що периметр паралелограма дорівнює 48 см, а одна з його сторін на 8 см довша за іншу. Знайдіть меншу сторону паралелограма.

А) 8 см; Б) 16 см; В) 6 см; Г) 12 см; Д) 10 см.

1.48°°. Зовні рівнобедреного трикутника ABC побудували два рівні кути ABM і CBK, сторони яких перетнули продовження основи AC відповідно у точках M і K. Доведіть рівність трикутників MBC і KBA (рис. 1.33, a).

1.49°°. З точки кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди довжиною 5 см і 12 см. Знайдіть відстань між кінцями хорд.

1.50•. Визначте взаємне розміщення прямих AB і CD за даними рисунка 1.33, *б*. Відповідь обґрунтуйте.

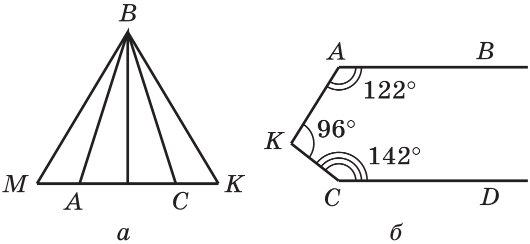


Рис. 1.33

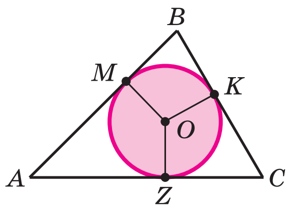


Рис. 1.34

1.51•. У трикутник ABC вписано коло (рис. 1.34), точки дотику якого M, Z поділяють дві його сторони AB і AC на відрізки, різниця яких відповідно дорівнює 3 см і 4 см ($AM > MB$, $AZ > ZC$). Знайдіть сторони трикутника ABC, якщо його периметр дорівнює 28 см.

1.52•. Навколо рівностороннього трикутника описано коло, радіус якого дорівнює $3\sqrt{3}$ см. Обчисліть радіус вписаного кола.

1.53•. Навколо кола описано рівнобічну трапецію, кут при основі якої дорівнює 30°. Висота трапеції – 7 см. Знайдіть довжину середньої лінії трапеції.

1.54•. Навколо кола описано рівнобічну трапецію, кут при основі якої дорівнює 150°. Середня лінія трапеції дорівнює $16\sqrt{3}$ см. Знайдіть довжину висоти трапеції.

1.55•. Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 16 см, а висота, проведена до неї, – 15 см.

1.56•. Висота AM трикутника ABC ділить його сторону BC на відрізки BM і MC. Знайдіть довжину відрізка MC, якщо $AB = 10\sqrt{2}$ см, $AB = 26$ см, $\angle B = 45°$.

1.57•. Сторона ромба дорівнює 10 см, а одна з діагоналей – 12 см. Знайдіть радіус вписаного в ромб кола.

1.58•. У колі радіуса 15 см на відстані 12 см від його центра проведено хорду. Знайдіть довжину цієї хорди.

1.59•. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону на відрізки 6 см і 10 см, рахуючи від вершини гострого кута. Обчисліть площу паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює 60°.

1.60••. У колі проведено дві хорди, що перетинаються. Одна з них точкою перетину ділиться навпіл, а друга – на частини завдовжки 5 см і 20 см. Знайдіть довжину кожної хорди.

1.61••. З точки поза колом проведено січну і дотичну. Знайдіть довжину дотичної, якщо вона на 5 см більша від зовнішньої частини і на стільки само менша від внутрішньої частини січної.

1.62••. З точки поза колом проведено січну і дотичну, сума довжин яких дорівнює 15 см, а зовнішня частина січної на 2 см менша від дотичної. Знайдіть довжини січної і дотичної.

1.63••. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 6 см і 9 см.

1.64••. У прямокутній трапеції менша основа дорівнює 8 см, а менша бічна сторона – $6\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу трапеції, якщо один з її кутів дорівнює $120°$.

1.65••. Навколо трапеції, основи якої дорівнюють 40 см і 14 см, а висота – 39 см, описано коло. Знайдіть його радіус.

1.66••. 1) Діагоналі трапеції дорівнюють 20 см і 15 см, висота – 12 см. Обчисліть площу трапеції.

2) Діагоналі трапеції дорівнюють 30 см і 26 см, а висота – 24 см. Обчисліть площу трапеції.

1.67••. Більша діагональ ромба дорівнює 24 см, а радіус вписаного кола – 6 см. Обчисліть площу ромба.

1.68••. Сторони трикутника дорівнюють 17 см, 25 см і 28 см. Коло з центром на найбільшій стороні дотикається до двох інших сторін. Обчисліть площу круга.

1.69••. Знайдіть площу паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 6 см і 4 см, а кут між діагоналями – $60°$.

§ 1.3. Задачі і методи їх розв'язування

Для геометрії закономірним є те, що введені основні поняття та сформульована аксіоматика складають основу для зародження нових тверджень. Однак їхню істинність потрібно доводити шляхом певних міркувань, які опираються на раніше доведені твердження або аксіоми. Їх називають *математичними задачами*.

Що таке математична задача?

Існують різні означення цього поняття, наприклад, ***математична задача*** – це будь-яка вимога обчислити, побудувати, довести або дослідити що-небудь, або запитання, рівносильне даній вимозі.

У кожній задачі щось дано (умова) і щось треба довести чи знайти (вимога, висновок). Виконати поставлену вимогу – це й означає розв'язати задачу. Зауважимо, що якщо істинність певного, часто застосовуваного математичного твердження встановлено міркуваннями (доведенням), то таке твердження називають *теоремою*. Навчитися доводити теореми, розв'язувати задачі – основна мета кожного школяра.

Чи можна стверджувати, що для успішного розв'язування геометричних задач і доведення теорем достатньо вільно володіти всім теоретичним матеріалом?

Ні. Це не є достатньою умовою. При хороших знаннях теорії слід набути практичних навичок. А це можливо лише під час розв'язування задач, починаючи від простіших і поступово переходячи до більш складних.

Математичні задачі умовно поділяють на чотири види відповідно до їхніх вимог: задачі на обчислення, доведення, дослідження і побудову. З ними ви вже ознайомилися в курсі планіметрії.

Приступаючи до розв'язування задачі, треба вибрати метод. Методи поділяють:

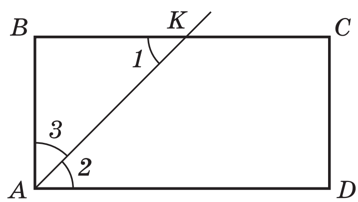
а) за структурою – синтетичний, аналітичний, від супротивного тощо;

б) за використанням математичного апарату – алгебраїчний, векторний, координатний, метод площ, метод геометричних перетворень тощо.

Суть синтетичного методу полягає в тому, що, виходячи з умови задачі чи теореми і використовуючи відомі твердження, будується ланцюг логічних міркувань, останнє з яких збігається з вимогою задачі. Наведемо приклад.

Задача 1.

Бісектриса кута прямокутника ділить більшу сторону на два відрізки 7 см і 9 см. Знайдіть периметр цього прямокутника.



Дано: $ABCD$ – прямокутник; AK – бісектриса, $K \in BC$; $BK = 7$ см, $KC = 9$ см (або $BK = 9$ см, $KC = 7$ см).

Знайти: P_{ABCD}.

Розв'язання	Чому саме так?
AK – бісектриса прямого кута BAD, $BC \parallel AD$, AK – січна, тому $\angle 1 = \angle 2$ як внутрішні різносторонні.	Нехай за умовою AK задана бісектриса. Точка K розбиває відрізок BC на два відрізки BK і KC. Далі, враховуючи

AK – бісектриса, тому $\angle 2 = \angle 3$. Отже $\angle 1 = \angle 3$.

У $\triangle ABK$: $\angle 1 = \angle 3$, тому $\triangle ABK$ – рівнобедрений і $AB = BK$.

1) Якщо $BK = 7$ см, $KC = 9$ см, то $AB = BK = 7$ см і $BC = 16$ см.
$P_{ABCD} = (7 + 16) \cdot 2 = 46$ (см).

2) Якщо $BK = 9$ см, $KC = 7$ см, то $AB = BK = 9$ см і $BC = 16$ см.
$P_{ABCD} = (9 + 16) \cdot 2 = 50$ (см).

Відповідь. 46 см або 50 см.

паралельність протилежних сторін прямокутника та їх перетин січною (*AK* – бісектриса), встановлюємо рівність двох кутів трикутника. Це визначає вид трикутника – рівнобедрений, а значить, рівність двох сторін. Тобто $AB = BK$.

Якщо $BK = 7$ см, то $AB = 7$ см, $BC = 7 + 9 = 16$ (см), тому периметр:

$P = (7 + 16) \cdot 2 = 46$ (см).

Якщо $BK = 9$ см, то $AB = 9$ см, $BC = 7 + 9 = 16$ (см), тому периметр:

$P = (9 + 16) \cdot 2 = 50$ (см). Отже, периметр прямокутника може дорівнювати або 46 см, або 50 см.

Ця задача є *опорною*, оскільки на такій ідеї будується багато задач і для паралелограма, і для трапеції. У цих фігурах бісектриса кута відтинає завжди рівнобедрений трикутник.

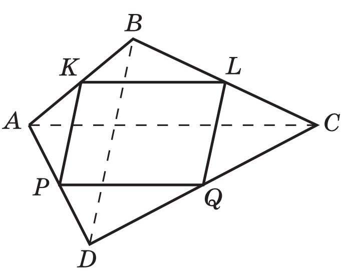
Зауважимо, що скорочене позначення кутів, у вигляді $\angle 1$, $\angle 2$, ..., спрощує записи та економить час, тому в таких випадках ним користуватися зручніше.

Як бачимо, у процесі розв’язування задачі 1 використовуються лише відомі геометричні твердження та проводяться відповідні обчислення. Причому для кожної геометричної задачі такі міркування свої.

Суть аналітичного методу полягає в тому, що, виходячи з вимоги (висновку) твердження (теореми чи задачі) і спираючись на відомі твердження, будуємо ланцюг логічних міркувань, який показує, що вимога є наслідком умови. Наведемо приклад.

Задача 2.

Доведіть, що середини сторін будь-якого опуклого чотирикутника є вершинами паралелограма.



Дано: $ABCD$ – чотирикутник; $K \in AB$, $AK = KB$; $L \in BC$, $BL = LC$; $Q \in CD$, $CQ = QD$; $P \in AD$, $AP = PD$.

Довести: $KLQP$ – паралелограм.

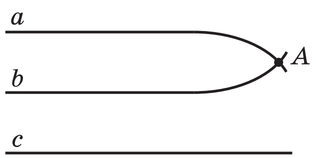
Доведення	Чому саме так?
$KLQP$ – заданий чотирикутник. K, L, Q, P – середини відповідних сторін. AC і BD – діагоналі чотирикутника $ABCD$. У $\triangle ABC$: KL – середня лінія, тому $KL \parallel AC$. У $\triangle ADC$: PQ – середня лінія, тому $PQ \parallel AC$. Маємо: 1) $KL \parallel AC$ і $AC \parallel PQ$, тому $KL \parallel PQ$ (за ознакою паралельних прямих). 2) Аналогічно $KP \parallel LQ$ як середні лінії трикутників ABD та BDC. Отже, у чотирикутнику $KLQP$ протилежні сторони паралельні, тому він – паралелограм, згідно з ознакою паралелограма. Що й вимагалося довести (щ. в. д.).	Вимога задачі: довести. Це означає, що істинність твердження слід підтвердити «ланцюжковим» міркуванням. Щоб чотирикутник $KLQP$ був паралелограмом, достатньо показати, що в нього протилежні сторони паралельні. Для цього заданий чотирикутник розбиваємо на два трикутники однією діагоналлю, а потім – іншою. Середні лінії однієї пари трикутників паралельні одній діагоналі, а другої пари – інші. (Відрізок, що сполучає середини двох сторін, є середньою лінією трикутника, яка має властивість: паралельна до третьої сторони трикутника.) Звідси, середні лінії кожної пари трикутників паралельні між собою. Таким чином, отримуємо, що в чотирикутнику $KLQP$ протилежні сторони паралельні, тому він – паралелограм.

Зауважимо, що доведення того, що чотирикутник, вершини якого є серединами довільного опуклого чотирикутника, є паралелограмом, можна проводити й іншими методами.

Синтетичний та *аналітичний* методи ще називають *прямими* методами розв'язування математичних задач.

Отже, щоб розв'язати задачу прямим методом, слід розпочинати з аналізу змісту задачі (від якого залежить вибір методу розв'язування). Далі допомогти собі створенням моделі у вигляді рисунка і продовжити міркувати над кожною дією, які в сукупності утворюють ланцюг дій, що ведуть або від умови до вимоги, або від вимоги до умови.

Суть методу від супротивного полягає в тому, що, маючи твердження, будуємо нове, заперечивши висновок попереднього. Утворюється протилежне твердження. Виходячи з висновку протилежного твердження, будуємо «ланцюг» істинних тверджень, поки не отримаємо твердження, яке суперечить або умові, або відомій аксіомі чи теоремі, або припущенню. Отже, отримуємо висновок, що протилежне твердження хибне, а тому початкове – істинне (тут діє логічний закон: з двох протилежних тверджень одне істинне, друге хибне, третього не дано). Розглянемо приклад.



Задача 3.

Доведіть твердження: якщо дві прямі паралельні третій, то вони паралельні між собою.

Будуємо протилежне твердження: існують дві прямі паралельні третій і не паралельні між собою.

Доведення	*Чому саме так?*
Від супротивного. Припустимо, що $a \parallel c$, $b \parallel c$, але $a \nparallel b$. Тоді $a \cap b = A$. Отримали твердження, яке протирічить аксіомі паралельності: через точку A на площині проходять дві різні прямі, паралельні третій. Отже, протилежне твердження хибне, тому початкове твердження – істинне. Тобто дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній. Щ. в. д.	Виходимо з висновку нового твердження: нехай прямі a та b, які паралельні третій прямій c, не паралельні між собою. Тоді вони перетинаються в деякій точці A. Отримали, що через точку проходять дві різні прямі, паралельні третій. Це суперечить аксіомі паралельності. Прийшли до протиріччя. Останнє твердження – хибне. Отже, початкове твердження – істинне.

Математичну задачу вважають розв'язаною, якщо: 1) записано відповідь у вигляді числа, виразу, вказано алгоритм побудови рисунка, коли це задача на обчислення, побудову чи дослідження; 2) підтверджено сформульоване в задачі твердження, коли це задача на доведення.

Метод від супротивного називають *непрямим* методом розв'язування математичних задач.

Розглянемо деякі інші методи розв'язування геометричних задач, які поділяють на види за використанням математичного апарату.

Алгебраїчний метод розв'язування задач

Розв'язуючи задачу алгебраїчним методом, слід приділити увагу таким етапам:

1. Моделювання тексту задачі за допомогою рисунка (у більшості випадків).
2. Введення позначень шуканих величин або тих, які приводять до шуканих (найчастіше літерами латинського алфавіту).
3. Складання рівняння або системи рівнянь, використовуючи введені позначення та відомі геометричні співвідношення між шуканими і даними величинами.
4. Розв'язування складеного рівняння або системи рівнянь. Повернення до введених позначень і визначення шуканих геометричних величин. За потреби, виконання дослідження знайдених розв'язків.
5. Записування відповіді.

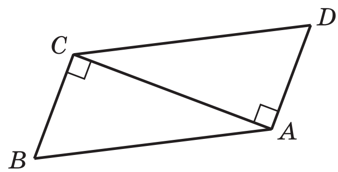
Вам доводилося неодноразово розв'язувати геометричні задачі алгебраїчними методами. Задачі, у яких задано залежність між двома вимірами, зводяться до розв'язування рівняння. Наприклад, одна зі сторін паралелограма на 3 см довша за іншу, а периметр – 30 см. Потрібно знайти довжини сторін паралелограма. Тоді, увівши змінну x як довжину сторони цього паралелограма, маємо довжину другої сторони $(x - 3)$. Враховуючи означення периметра паралелограма та відоме його значення, отримуємо рівняння:

$$(x + x - 3) \cdot 2 = 30.$$

Наведемо ще приклади розв'язування задач алгебраїчним методом.

Задача 4.

Периметр прямокутного трикутника дорівнює 36 см. Гіпотенуза відноситься до катета як 5 : 3. Знайдіть сторони трикутника.



Дано: $\triangle ACB$ ($\angle C = 90°$); $P_\triangle = 36$ см;
$AB : AC = 5 : 3$.

Знайти: AB, AC і BC.

Розв'язання	Чому саме так?
Позначимо коефіцієнт пропорційності через k. Тоді $AB = 5k$, а $AC = 3k$. $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $25k^2 = 9k^2 + BC^2$,	$P_\triangle = 36$ см – єдиний лінійний вимір, з яким пов'язані сторони трикутника. $\dfrac{\textit{Гіпотенуза}}{\textit{Катет}} = \dfrac{5}{3}$.

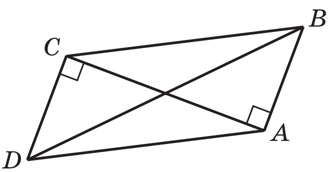
$BC = \sqrt{25k^2 - 9k^2} = 4k$ ($BC > 0$, $k > 0$).
$P_\triangle = AB + AC + BC$, або
$5k + 3k + 4k = 36$,
$12k = 36$, $k = 3$.
$AB = 5 \cdot 3 = 15$ (см),
$AC = 3 \cdot 3 = 9$ (см),
$BC = 4 \cdot 3 = 12$ (см).

Відповідь. 15 см, 9 см і 12 см.

Нехай $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{3} = \frac{5k}{3k}$, звідси $AB = 5k$, $AC = 3k$.

$P_\triangle = AB + AC + BC$. Визначити сторону BC можна за теоремою Піфагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$, звідси $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$, $BC > 0$, $BC = 4k$. Метод розв'язування – *алгебраїчний*, оскільки використовується математична модель – рівняння $5k + 3k + 4k = 36$.

Задача 5.



У паралелограмі діагоналі дорівнюють 16 см і 20 см. Менша з них перпендикулярна до його сторони. Знайдіть площу цього паралелограма.

Дано: $ABCD$ – паралелограм; $\angle A > \angle B$, $AC < BD$; $AC \perp AB$, $AC \perp CD$, $AC = 16$ см, $BD = 20$ см.

Знайти: S_{ABCD}.

Розв'язання	Чому саме так?
Нехай $ABCD$ – заданий паралелограм, у якому $AC \perp CD$ і $AC \perp AB$. Позначимо сторони паралелограма: $AB = x$, $BC = y$. Тоді маємо рівняння: $2(x^2 + y^2) = 16^2 + 20^2$, звідси $x^2 + y^2 = \frac{16^2 + 20^2}{2}$, $x^2 + y^2 = 328$. За теоремою Піфагора з $\triangle CAB$ ($\angle A = 90°$):	Під час розв'язування цієї задачі спочатку вибираємо формулу для обчислення площі паралелограма. $S_{ABCD} = a \cdot h_a$, де a – основа паралелограма, h_a – висота, проведена до неї. $AC \perp AB$, тому AC є висотою паралелограма, проведеною до сторони AB або CD, довжини яких невідомі. Сторони паралелограма пов'язані з його діагоналями формулою $(a^2 + b^2) \cdot 2 = d_1^2 + d_2^2$. Довжини сторін паралелограма є невідомими, тому,

$AB^2 + AC^2 = BC^2$, тобто маємо: $x^2 + 16^2 = y^2$, або $y^2 - x^2 = 16^2$.

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 328, \\ y^2 - x^2 = 256. \end{cases}$$

$x^2 + y^2 - (y^2 - x^2) = 328 - 256$,

$2x^2 = 72$, $x^2 = 36$,

$(x > 0)$, $x = 6$.

$S_{ABCD} = AB \cdot AC = 6$ см $\cdot$ 16 см $= 96$ см^2.

Відповідь. 96 см^2.

очевидно, потрібно скласти систему рівнянь. Одне з рівнянь можна отримати за вищевказаною формулою, а друге, враховуючи перпендикулярність діагоналі паралелограма, маємо прямокутний трикутник з двома невідомими сторонами, які є його сторонами.

Зауважимо, що, беручи до уваги вимогу задачі, можна не шукати обидві сторони паралелограма, а лише, наприклад, сторону AB.

Метод площ

Якщо умова задачі містить дані, з яких легко знайти площу одним зі способів, однак, використовуючи інший спосіб для відшукання площі цієї самої фігури, маємо один з лінійних вимірів невідомий, то, прирівнюючи площі, отримують рівняння з одним невідомим.

Задача 6.

Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Обчисліть висоту, проведену до сторони, яка має довжину 14 см.

Розв'язання	Чому саме так?
Нехай a, b, c – сторони деякого $\triangle ABC$, причому $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см. $a < b$ і $b < c$. h_b – висота, проведена до середньої сторони. За формулою Герона: $S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, а за іншою формулою: $S_{\triangle} = \frac{1}{2} b \cdot h_b$. $S_{\triangle} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} =$	Маючи три сторони трикутника a, b, c, можна знайти його площу за формулою Герона: $S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. З іншої боку, площу трикутника можна знайти за формулами: $S_{\triangle} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$, де h_i – висота, проведена до

$= \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2} =$
$= \sqrt{3^2 \cdot 7^2 \cdot 4^2} = 3 \cdot 7 \cdot 4 =$
$= 84$ (см^2).

$S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot h_b = 7 \cdot h_b,$

$7 \cdot h_b = 84,$

$h_b = 12$ (см).

Відповідь. 12 см.

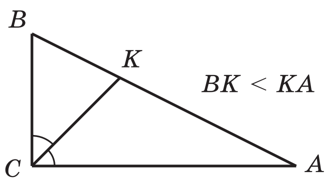
i-ї сторони. Залишилося вибрати сторону трикутника і отримати рівняння:

$$\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot h_i = S_\triangle,$$

у якому невідомим буде h_i.

Зауважимо, що хоча під час розв'язування задачі 6 використовувалося алгебраїчне рівняння, однак більш суттєвим у розв'язуванні задачі є міркування про площу фігури, тому такий метод отримав назву *метод площ*.

Задача 7.



Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 см і 6 см. Знайдіть довжину бісектриси прямого кута.

Дано: $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$); CK – бісектриса; $BC = 3$ см, $AC = 6$ см.

Знайти: CK.

Розв'язання

Нехай ABC – даний прямокутний трикутник ($\angle C = 90°$), у якому $BC = 3$ см, $AC = 6$ см і CK – бісектриса прямого кута.

Введемо позначення: $CK = x$. Знайдемо площу $\triangle ABC$ двома різними способами:

1) $S_{\triangle ABC} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$ (см^2);

2) $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCK} + S_{\triangle ACK}$;

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \sin 45° +$

Чому саме так?

Площу $\triangle ABC$ можна знайти за формулою $S = \frac{ab}{2}$, де a і b – два катети.

Бісектриса розділила $\triangle ABC$ на два трикутники, площі яких невідомі. Їхні площі можна знайти за формулою:

$$S_\triangle = \frac{1}{2} mn \sin\gamma,$$

де m і n – сторони трикутника, а γ – кут між ними, тобто $\gamma = 45°$.

$$S_{\triangle BCK} = \frac{1}{2} CB \cdot CK \cdot \sin 45°,$$

$+\frac{1}{2}\cdot 6x\cdot\sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{4}x +$

$+\frac{6\sqrt{2}}{4}x = \frac{9\sqrt{2}x}{4}.$

Прирівнюємо праві частини рівностей:

$$\frac{9\sqrt{2}x}{4} = 9.$$

Звідси $x = 2\sqrt{2}$.

Тобто $CK = 2\sqrt{2}$ см.

Відповідь. $2\sqrt{2}$ см.

$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$S_{\triangle ACK} = \frac{1}{2}CK\cdot CA\cdot\sin 45^\circ.$

Оскільки

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCK} + S_{\triangle ACK},$$

а бісектриса CK є невідомою, то отримаємо рівняння з одним невідомим.

Метод векторів

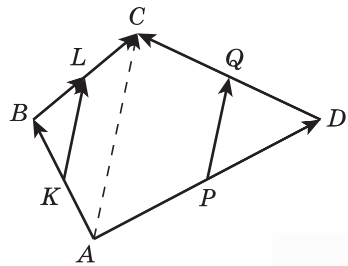
Щоб застосовувати метод векторів до розв'язування задачі, потрібно виконати такі дії:

1. Перевести задачу на мову векторів, тобто розглянути деякі дані в задачі відрізки як вектори та скласти векторну рівність.
2. Здійснити перетворення для векторної рівності, користуючися відповідними властивостями дій над векторами та відомими векторними рівностями.
3. Повернутися від векторної мови до геометричної.
4. Записати відповідь.

Метод векторів найчастіше використовується під час розв'язування задач, у яких вимагається довести: паралельність прямих (відрізків), поділ відрізка в певному відношенні; що три точки лежать на одній прямій; що даний чотирикутник – паралелограм (ромб, прямокутник, квадрат, трапеція). Проілюструємо суть цього методу на прикладі розв'язування задачі.

Задача 8.

Доведіть, що середини сторін будь-якого опуклого чотирикутника є вершинами паралелограма.



Дано: $ABCD$ – чотирикутник;
$K \in AB$, $AK = KB$;
$L \in BC$, $BL = LC$;
$Q \in CD$, $CQ = QD$;
$P \in AD$, $AP = PD$.

Довести: $KLQP$ – паралелограм.

Доведення	*Чому саме так?*
1. Переведемо задачу на мову векторів, замінивши відрізки векторами: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{BL}$, $\overrightarrow{KB}$.	Перевівши задачу на мову векторів, отримуємо вимогу задачі: довести рівність векторів $\overrightarrow{KL}$ і $\overrightarrow{PQ}$.
2. Скористаємося правилом трикутника для додавання векторів: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{KL}$. Враховуючи, що $\overrightarrow{KB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (K – середина AB) і $\overrightarrow{BL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (L – середина BC), отримуємо рівність: $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=$ $=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Отже, $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Аналогічно $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.	Скориставшися правилом трикутника для знаходження суми векторів, маємо: $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Однак $\overrightarrow{KB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, тому $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Аналогічно отримуємо, що $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
3. Тому $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{PQ}$. Тобто вектори однаково напрямлені, лежать на паралельних прямих і мають однакову довжину. Це доводить, що $KLQP$ – паралелограм. Щ. в. д.	Отже, $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{PQ}$, що й вимагалося довести.

Метод координат

Розв'язуючи задачу координатним методом, слід виконати такі дії:

1. Записати геометричну задачу мовою координат.
2. Перетворити вираз чи обчислити його значення.
3. Перевести знайдений результат на мову геометрії.
4. Записати відповідь.

Методом координат найчастіше розв'язують задачі:

– на відшукання геометричних місць точок;

– на доведення залежностей між лінійними елементами геометричних фігур.

Розв'язуючи задачу методом координат, потрібно раціонально вибрати систему координат: дану фігуру слід розмістити відносно осей координат так, щоб якнайбільше координат потрібних точок дорівнювало нулю, а також одному і тому самому числу. Наприклад, координати вершин прямокутника $ABCD$ можна вибрати так, як на рисунку 1.35: $A(0;0)$, $B(0;b)$, $C(a;b)$, $D(a;0)$.

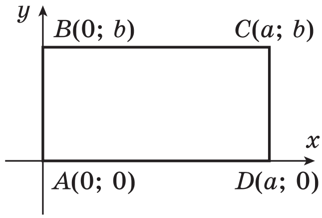
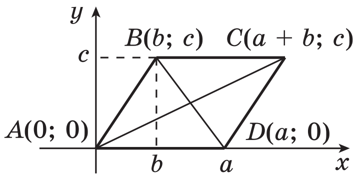


Рис. 1.35

Проілюструємо суть методу на прикладі.

Задача 9.

Доведіть, що коли в паралелограма діагоналі рівні, то він прямокутник.



Доведення

Розмістимо паралелограм у системі координат так, щоб його вершини мали координати: $A(0;0)$, $B(b;c)$, $C(a+b;c)$, $D(a;0)$, причому $a>0$, $b \geqslant 0$, $c>0$. За умовою $AC=BD$. Виразимо відстані між точками A і C, B і D через їхні координати:

$$AC=\sqrt{(a+b-0)^2+(c-0)^2},\ BD=\sqrt{(a-b)^2+(0-c)^2}.$$

Тоді $\sqrt{(a+b-0)^2+(c-0)^2}=\sqrt{(a-b)^2+(0-c)^2}$, або

$(a+b-0)^2+(c-0)^2=(a-b)^2+(0-c)^2$, звідси $4ab=0$.

Оскільки $a>0$, то $b=0$, а це означає, що точка $B(b;\ c)$ лежить на осі Oy. Тому кут BAD прямий. Звідси випливає, що паралелограм $ABCD$ – прямокутник.

Метод геометричних перетворень: метод повороту, метод симетрії, метод паралельного перенесення, метод гомотетії.

Розв'язуючи задачі методом геометричних перетворень, розглядають поряд з даними фігурами нові фігури, які отримали з даних за допомогою певного перетворення. З'ясовують властивості нових фігур, переносять ці властивості на дані фігури, а далі – знаходять спосіб розв'язування задачі.

Кажуть, що задачі, які розв'язані методом векторів, методом координат, методом геометричних переміщень, методом площ та іншими методами, у яких використовується більше властивостей геометричних фігур, розв'язані *геометричними методами*.