А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 9 класу
з поглибленим вивченням математики

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2009

УДК 373:512
ББК 22.151я721
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(Лист від 19.06.2009 р. № 1/11-4351)

Відповідальний за випуск
Головний спеціаліст Міністерства освіти і науки України
Н. С. Прокопенко

Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.
М52 Геометрія: Підруч. для 9 кл. шкіл з поглибл. вивченням математики.— Х.: Гімназія, 2009.— 272 с.: іл.
ISBN 978-966-474-060-6.

УДК 373:512
ББК 22.151я721

ISBN 978-966-474-060-6

ВІД АВТОРІВ

Любі дев'ятикласники!

Ми маємо надію, що ви не розчарувалися, обравши нелегкий шлях навчатися в математичному класі. У цьому навчальному році ви продовжите вивчати математику за поглибленою програмою. Ми сподіваємося, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник розділено на сім параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено зірочкою (*)). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі у тестовій формі з рубрики «Перевір себе».

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете знати більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Дерзайте! Бажаємо успіху!

Шановні колеги!

Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з поглибленим вивченням математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає великих зусиль учителя, який формує навчальний матеріал по крихтах, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка і факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n° завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

 задачі, у яких отримано результат, що може бути використаний при розв'язуванні інших задач;

n (m) задача, яка пропонується в різних пунктах для розв'язування різними способами (номер m вказує місцезнаходження цієї задачі в іншому пункті);

▲ закінчення доведення теореми.

ПОВТОРЕННЯ Й СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 8 КЛАСУ §1

1. Задачі на повторення навчального матеріалу з курсу геометрії 8 класу

1.1.° Бічна сторона *AB* і менша основа *BC* трапеції *ABCD* дорівнюють відповідно 16 см і 15 см. Який з відрізків перетинає бісектриса кута *BAD* — основу *BC* чи бічну сторону *CD*?

1.2.° Пряма *AB* дотикається до кола в точці *B*, а пряма *AC* перетинає коло в точках *C* і *D*. Знайдіть відрізок *CD*, якщо $AB = 6$ см, $AC = 9$ см.

1.3.° На одній стороні кута з вершиною в точці *A* позначили точки *B* і *C*, а на другій — точки *D* і *E*, причому $AB = 10$ см, $AC = 18$ см, $AD : AE = 5 : 9$. Знайдіть *CE*, якщо $BD = 20$ см.

1.4.° Площа паралелограма *ABCD* дорівнює *S*. Знайдіть площу зафарбованої фігури (рис. 1.1).

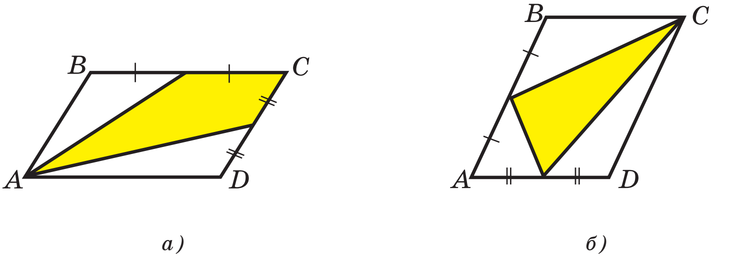

Рис. 1.1

1.5.° Знайдіть відношення площ S_1 і S_2 трикутників, зображених на рисунку 1.2 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

1.6.° Відрізок *AD* — бісектриса трикутника *ABC*, площа трикутника *ABD* дорівнює 12 см², а трикутника *ACD* — 20 см². Знайдіть відношення сторони *AB* до сторони *AC*.

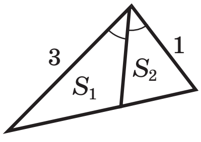

Рис. 1.2

1.7.° Діагоналі рівнобічної трапеції є бісектрисами її гострих кутів і точкою перетину поділяються у відношенні 5 : 13. Знайдіть площу трапеції, якщо її висота дорівнює 90 см.

1.8.° Катети прямокутного трикутника дорівнюють 18 см і 24 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини меншого гострого кута.

1.9.° Медіани AM і CK трикутника ABC перпендикулярні. Знайдіть сторони трикутника, якщо $AM = 9$ см і $CK = 12$ см.

1.10.° У трикутнику ABC медіани BM і CK перпендикулярні і перетинаються в точці O. Знайдіть довжину відрізка AO, якщо $BM = 36$ см і $CK = 15$ см.

1.11.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, BD і AM − висоти трикутника, $BD : AM = 3 : 1$. Знайдіть $\cos C$.

1.12.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, BD і CK − висоти трикутника, $\cos A = \frac{3}{7}$. Знайдіть відношення $CK : BD$.

1.13.° Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони і утворює з основою трапеції кут $30°$. Знайдіть висоту трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює R.

1.14.° Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює сумі площ двох даних квадратів.

1.15.° На медіані AM трикутника ABC позначено точку D так, що $AD : DM = 1 : 3$. Через точку D проведено пряму, паралельну стороні AC. У якому відношенні ця пряма ділить сторону BC, рахуючи від вершини C?

1.16.° У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $AB = AD$, $CB = CD$. Доведіть, що $AD \perp BC$.

1.17.° На основі AC рівнобедреного трикутника ABC позначили точку M, а на бічних сторонах AB і BC відповідно точки K і N так, що $MK \parallel BC$, $MN \parallel AB$. Знайдіть довжину бічної сторони, якщо відомо, що периметр чотирикутника $MKBN$ дорівнює 30 см.

1.18.° У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $AB = 2AD$. Точка K — середина сторони AB. Знайдіть кут CKD.

1.19.° Побудуйте квадрат за трьома точками, які є серединами трьох його сторін.

1.20.° Діагоналі рівнобічної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) перетинаються в точці M. Відомо, що $\angle CMD = \angle BAD$. Доведіть, що $BC = AB$.

1.21.° У рівнобічній трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) бісектриси гострих кутів BAD і CDA перетинаються в точці, яка належить основі BC. Знайдіть периметр трапеції, якщо $BC = 36$ см, $\angle BAD = 60°$.

1.22.• Побудуйте паралелограм за його вершиною і серединами сторін, яким ця вершина не належить.

1.23.• Перпендикуляр, опущений з вершини кута прямокутника на його діагональ, ділить цю діагональ на відрізки, довжини яких відносяться як 1 : 3. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника.

1.24.• На стороні AD прямокутника $ABCD$ позначили точку M так, що $MD = CD$, $MA = MC$. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника.

1.25.• Висоти BN і DM ромба $ABCD$, проведені з його тупих кутів B і D, перетинаються в точці F. Знайдіть кути ромба, якщо $NF : FB = MF : FD = 1 : 2$.

1.26.• Сума довжин катетів AB і BC прямокутного трикутника ABC дорівнює a. На гіпотенузі AC поза трикутником побудовано квадрат $ACMN$, діагоналі якого перетинаються в точці O. З точки O на прямі BA і BC опустили перпендикуляри OK і OF відповідно. Знайдіть периметр чотирикутника $BKOF$.

1.27.• Серединний перпендикуляр діагоналі прямокутника утворює з його більшою стороною кут $60°$. Відрізок цього перпендикуляра, який міститься всередині прямокутника, дорівнює 12 см. Знайдіть більшу сторону прямокутника.

1.28.• На медіані BD трикутника ABC позначено точку M так, що $BM : MD = 3 : 2$. Пряма AM перетинає сторону BC у точці E. У якому відношенні точка E поділяє сторону BC, рахуючи від вершини B?

1.29.• Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає діагональ BD і сторону BC у точках E і F відповідно так, що $BE : ED = 2 : 7$. Знайдіть відношення $BF : FC$.

1.30.• Медіани AD і BM трикутника ABC перетинаються в точці O. Через точку O проведено пряму, яка паралельна стороні AC і перетинає сторону BC у точці K. Знайдіть BD, DK і KC, якщо $BC = 18$ см.

1.31.• Коло, центр якого належить гіпотенузі прямокутного трикутника, дотикається до більшого катета і проходить через вершину протилежного гострого кута. Знайдіть радіус кола, якщо катети дорівнюють 5 см і 12 см.

1.32.• Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть відстань від вершини меншого гострого кута трикутника до центра вписаного кола.

1.33.• Площа рівнобічної трапеції дорівнює $36\sqrt{2}$ см², а гострий кут — $45°$. Знайдіть висоту трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

1.34.$^{\bullet}$ Бісектриса кута A трикутника ABC ($\angle C = 90°$) поділяє катет BC на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайдіть радіус кола, яке проходить через точки A, C і точку перетину цієї бісектриси з катетом BC.

1.35.$^{\bullet}$ Центр кола, вписаного в рівнобічну трапецію, віддалений від кінців її бічної сторони на 12 см і 16 см. Знайдіть периметр трапеції.

1.36.$^{\bullet}$ Діагональ рівнобічної трапеції поділяє висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 12 см, а бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

1.37.$^{\bullet}$ Більша діагональ прямокутної трапеції поділяє висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 9 см. Більша бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

1.38.$^{\bullet}$ У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка M — середина AB. Знайдіть площу трикутника CMD, якщо площа даної трапеції дорівнює S.

1.39.$^{\bullet}$ Коло, побудоване на діагоналі AC ромба $ABCD$ як на діаметрі, проходить через середину сторони AB. Знайдіть кути ромба.

1.40.$^{\bullet\bullet}$ На сторонах AB і BC трикутника ABC побудовано в зовнішній бік квадрати $ABDE$ і $BCFG$. Виявилося, що $DG \parallel AC$. Доведіть, що трикутник ABC є рівнобедреним.

1.41.$^{\bullet\bullet}$ У трикутнику ABC проведено висоту AH і медіану BM. Відрізок MH перетинає бісектрису CK в її середині. Доведіть, що трикутник ABC є рівнобедреним.

1.42.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте чотирикутник за його сторонами і відстанню між серединами діагоналей.

1.43.$^{\bullet\bullet}$ Точка C належить прямому куту BOA (рис. 1.3). Доведіть, що периметр трикутника ABC більший, ніж $2OC$.

1.44.$^{\bullet\bullet}$ На аркуші паперу в клітинку накреслено трикутник ABC з вершинами у вузлах сітки (рис. 1.4). За допомогою лінійки побудуйте точку перетину медіан цього трикутника.

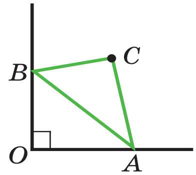

Рис. 1.3

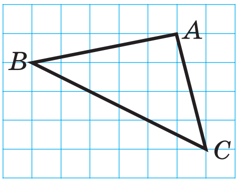

Рис. 1.4

1.45.•• У трапеції довжина однієї з діагоналей дорівнює сумі основ, а кут між діагоналями дорівнює 60°. Доведіть, що трапеція є рівнобічною.

1.46.•• На стороні AC трикутника ABC позначили точку K так, що вписані кола трикутників ABK і BCK дотикаються. Доведіть, що точка K належить вписаному колу трикутника ABC.

1.47.•• На сторонах AB і CD трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) відповідно позначили точки K і L такі, що $\angle BAL = \angle CDK$. Доведіть, що $\angle BLA = \angle CKD$.

1.48.•• У гострокутному трикутнику ABC відрізок AH є висотою. З точки H на сторони AB і AC опущено перпендикуляри HK і HL відповідно. Доведіть, що чотирикутник $BKLC$ — вписаний.

1.49.•• Точка J належить трикутнику ABC і $\angle BJC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$. Відомо, що пряма AJ містить центр описаного кола трикутника BJC. Доведіть, що J — центр вписаного кола трикутника ABC.

1.50.•• Дано два кола. Перше з них проходить через центр O другого кола і перетинає це коло в точках A і B. Хорда OC першого кола перетинає друге коло в точці J. Доведіть, що точка J — центр вписаного кола трикутника ABC.

1.51.•• У трикутнику ABC проведено висоти AH і CP. Знайдіть величину кута B, якщо відомо, що $AC = 2PH$.

1.52.•• На стороні AC трикутника ABC позначили точку D таку, що $\angle ABD = \angle BCD$ і $AB = CD$. Бісектриса кута A перетинає сторону BC в точці E. Доведіть, що $DE \parallel AB$.

1.53.•• Точка D — середина сторони AC трикутника ABC, DE і DF — бісектриси відповідно трикутників ABD і CBD. Відрізки BD і EF перетинаються в точці M. Доведіть, що $DM = \frac{1}{2}EF$.

1.54.•• У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) відрізки CH, CL і CM — відповідно висота, бісектриса і медіана трикутника. Знайдіть довжину CL, якщо $CH = 6$, $CM = 10$.

1.55.•• У трикутнику ABC проведено бісектрису BD. Відомо, що $AB = 15$ см, $BC = 10$ см. Доведіть, що $BD < 12$ см.

1.56.•• В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Відомо, що $\angle BAC = \angle CBD$, $\angle BCA = \angle CDB$. Доведіть, що $CO \cdot CA = BO \cdot BD$.

1.57.•• Бісектриси кутів A і B трикутника ABC перетинають описане коло трикутника ABC у точках K і L відповідно. Відрізки

AK і *BL* перетинаються в точці *O* так, що $\frac{AO}{OK}=\frac{BO}{OL}$. Доведіть, що трикутник *ABC* — рівнобедрений.

1.58.•• Трапеція *ABCD* (*AB* ∥ *CD*) така, що коло, описане навколо трикутника *ABD*, дотикається до прямої *BC*. Доведіть, що коло, описане навколо трикутника *BCD*, дотикається до прямої *AD*.

1.59.•• У трикутнику *ABC* проведено бісектрису *BK*. На сторонах *BA* і *BC* позначили відповідно точки *M* і *N* такі, що $\angle AKM = \angle CKN = \frac{1}{2}\angle ABC$. Доведіть, що пряма *AC* — дотична до кола, описаного навколо трикутника *MBN*.

1.60.•• У колі проведено хорду *CD* паралельно діаметру *AB* так, що в трапецію *ABCD* можна вписати коло. Знайдіть довжину хорди *CD*, якщо $AB = 2R$.

1.61.•• На медіані *AM* трикутника *ABC* позначили точку *F*. Точки *K* і *N* — основи перпендикулярів, проведених з точки *F* на сторони *AB* і *AC* відповідно. Знайдіть відрізки *FK* і *FN*, якщо $FK + FN = d$, $AB = c$, $AC = b$.

1.62.•• У трикутнику *ABC* проведено чевіани AA_1, BB_1, CC_1, які перетинаються в точці *M*. Відомо, що площа трикутника AMB_1 дорівнює площі трикутника AMC_1, площа трикутника BMC_1 дорівнює площі трикутника BMA_1, а площа трикутника CMA_1 дорівнює площі трикутника CMB_1. Доведіть, що *M* — точка перетину медіан.

1.63.•• У трапеції *ABCD* (*AD* ∥ *BC*, $AD > BC$) на діагоналі *AC* позначили точку *E* так, що *BE* ∥ *CD*. Доведіть, що площі трикутників *ABC* і *DEC* рівні.

1.64.* На медіані *BM* трикутника *ABC* позначили точку *D*. Через точки *C* і *D* провели прямі, паралельні відповідно прямим *BM* і *AB*. Проведені прямі перетинаються в точці *E*. Доведіть, що $BE = AD$.

1.65.* На основі *AD* трапеції *ABCD* позначили точку *M*. Відомо, що периметри трикутників *ABM*, *MBC* і *CMD* рівні. Доведіть, що $AD = 2BC$.

1.66.* У коло вписано чотирикутник *ABCD*. На хорді *AB* побудуйте точку *M* таку, що $\angle ADM = \angle BCM$.

1.67.* Точки *M* і *N* — середини основ *AD* і *BC* трапеції *ABCD* відповідно. На сторонах *AB* і *CD* позначили точки *P* і *Q* відповідно так, що *PQ* ∥ *AD* ($AP \neq PB$). Доведіть, що прямі *PN*, *MQ* і *AC* перетинаються в одній точці.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ §2

2. Синус, косинус, тангенс і котангенс кута від 0° до 180°

Поняття «синус», «косинус», «тангенс» і «котангенс» гострого кута вам знайомі з курсу геометрії 8 класу. Розширимо ці поняття для будь-якого кута α, де $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$.

У верхній півплощині координатної площини розглянемо півколо з центром у початку координат, радіус якого дорівнює 1 (рис. 2.1). Таке півколо називають **одиничним**.

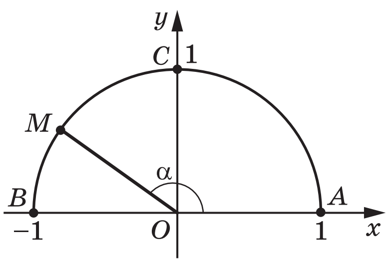

Рис. 2.1

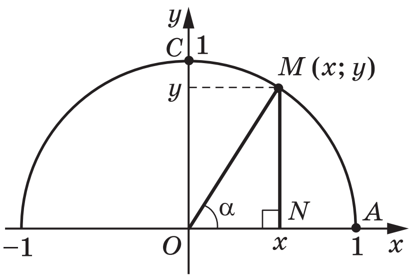

Рис. 2.2

Будемо говорити, що **куту** α **(**$0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$**) відповідає точка** M одиничного півкола, якщо $\angle MOA = \alpha$, де точки O і A мають відповідно координати (0; 0) і (1; 0) (рис. 2.1). Наприклад, на рисунку 2.1 куту, який дорівнює 90°, відповідає точка C; куту, який дорівнює 180°, — точка B; куту, який дорівнює 0°, — точка A.

Нехай α — гострий кут. Йому відповідає деяка точка $M(x;\ y)$ дуги AC (рис. 2.2). З прямокутного трикутника OMN маємо:

$$\cos\alpha = \frac{ON}{OM}, \quad \sin\alpha = \frac{MN}{OM}.$$

Оскільки $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, то $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$.

Отже, косинус і синус гострого кута α — це відповідно абсциса і ордината точки M одиничного півкола, яка відповідає куту α.

Отриманий результат підказує, як визначити синус і косинус будь-якого кута α, де $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$.

О з н а ч е н н я. Косинусом і синусом кута α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) називають відповідно абсцису *x* і ординату *y* точки *M* одиничного півкола, яка відповідає куту α (рис. 2.3).

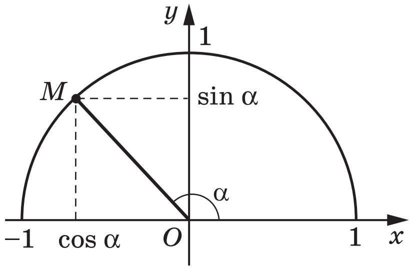

Рис. 2.3

Користуючись таким означенням, можна, наприклад, записати: $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$.

Якщо $M(x; y)$ — довільна точка одиничного півкола, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$ і $0 \leqslant y \leqslant 1$. Отже, для будь-якого кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, маємо:

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Якщо α — тупий кут, то абсциса точки одиничного півкола, що відповідає цьому куту, є від'ємною. Отже, косинус тупого кута є від'ємним числом. Зрозуміло, що справедливе і таке твердження: якщо $\cos\alpha < 0$, то α — тупий або розгорнутий кут.

З курсу геометрії 8 класу ви знаєте, що для будь-якого гострого кута α виконуються рівності

$$\boxed{\begin{gathered}\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,\\ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha\end{gathered}}$$

Ці формули залишаються справедливими і для $\alpha = 0°$, і для $\alpha = 90°$ (переконайтеся в цьому самостійно).

Нехай кутам α і $180° - \alpha$, де $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 90°$ і $\alpha \neq 180°$, відповідають точки $M(x_1; y_1)$ і $N(x_2; y_2)$ одиничного півкола (рис. 2.4).

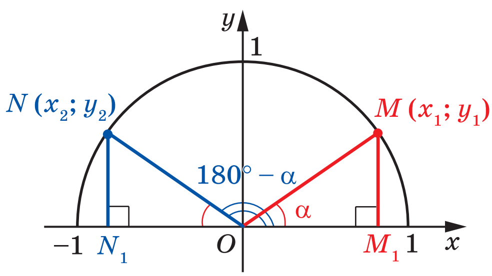

Рис. 2.4

Прямокутні трикутники OMM_1 і ONN_1 рівні за гіпотенузою і гострим кутом ($ON = OM = 1$, $\angle MOM_1 = \angle NON_1 = \alpha$). Звідси $y_2 = y_1$ і $x_2 = -x_1$. Отже,

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha,\\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha\end{array}}$$

Переконайтеся самостійно, що ці рівності залишаються правильними для $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$.

Якщо α — гострий кут, то, як ви знаєте з курсу геометрії 8 класу, справедлива тотожність

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,}$$

яка залишається правильною для $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$ (переконайтеся в цьому самостійно).

Нехай α — тупий кут. Тоді $180^\circ - \alpha$ є гострим кутом. Маємо:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (\sin(180^\circ - \alpha))^2 + (-\cos(180^\circ - \alpha))^2 =$$
$$= \sin^2(180^\circ - \alpha) + \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1.$$

Отже, рівність $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ виконується для всіх $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$.

З геометричних міркувань зрозуміло, що коли $0^\circ \leqslant \alpha < \beta \leqslant 90^\circ$, то $\sin\alpha < \sin\beta$ (рис. 2.5); коли $90^\circ \leqslant \alpha < \beta \leqslant 180^\circ$, то $\sin\alpha > \sin\beta$ (рис. 2.6); коли $0^\circ \leqslant \alpha < \beta \leqslant 180^\circ$, то $\cos\alpha > \cos\beta$ (рис. 2.5, 2.6).

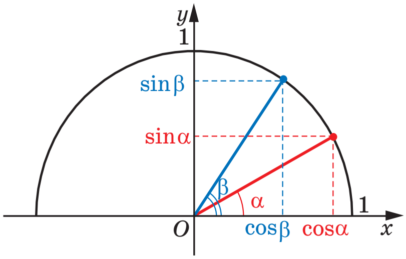

Рис. 2.5

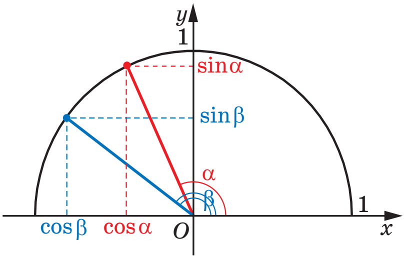

Рис. 2.6

О з н а ч е н н я. **Тангенсом** **кута α, де $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ і $\alpha \neq 90^\circ$, називають відношення $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,** тобто

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Оскільки $\cos 90^\circ = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha$ не визначений для $\alpha = 90^\circ$.

Означення. Котангенсом кута α (позначають $\mathrm{ctg}\,\alpha$), де $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, називають відношення $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, тобто

$$\boxed{\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Оскільки $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$, то $\mathrm{ctg}\,\alpha$ не визначений для $\alpha = 0^\circ$ і $\alpha = 180^\circ$.

Очевидно, що кожному куту α ($0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$) відповідає *єдина* точка одиничного півкола. Отже, кожному куту α відповідає єдине число, яке є значенням синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq 90^\circ$, котангенса для $\alpha \neq 0^\circ$ і $\alpha \neq 180^\circ$). Тому залежність значень синуса (косинуса, тангенса, котангенса) від величини кута є функціональною.

Функції $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$, $p(\alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$, які відповідають цим функціональним залежностям, називають **тригонометричними функціями** кута α.

Задача. Доведіть, що $\mathrm{tg}\,(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Розв'язання

$$\mathrm{tg}\,(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\,\alpha;$$

$$\mathrm{ctg}\,(180^\circ - \alpha) = \frac{\cos(180^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Приклад. Знайдіть $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\mathrm{tg}\,120^\circ$, $\mathrm{ctg}\,120^\circ$.

Розв'язання. Маємо:

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\mathrm{tg}\,120^\circ = \mathrm{tg}\,(180^\circ - 60^\circ) = -\mathrm{tg}\,60^\circ = -\sqrt{3};$$

$$\mathrm{ctg}\,120^\circ = \mathrm{ctg}\,(180^\circ - 60^\circ) = -\mathrm{ctg}\,60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

ВПРАВИ

2.1.° Чому дорівнює:

1) $\sin(180° - \alpha)$, якщо $\sin\alpha = \frac{1}{3}$;

2) $\cos(180° - \alpha)$, якщо $\cos\alpha = 0{,}7$;

3) $\cos(180° - \alpha)$, якщо $\cos\alpha = -\frac{4}{9}$;

4) $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -5$;

5) $\operatorname{ctg}(180° - \alpha)$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{3}$?

2.2.° Кути α і β суміжні, $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$.

1) Знайдіть $\cos\beta$.
2) Який із кутів α і β є гострим, а який — тупим?

2.3.° Знайдіть значення виразу:
1) $2\sin 90° + 3\cos 0° + \operatorname{ctg} 90°$;
2) $3\sin 0° - 5\cos 180° + \operatorname{tg} 180°$;
3) $\operatorname{tg} 23° \cdot \operatorname{tg} 0° \cdot \operatorname{tg} 106°$;
4) $6\operatorname{tg} 180° + 5\sin 180° + \cos 180°$;
5) $\cos^2 165° + \sin^2 165°$;

6) $\dfrac{\sin 0° + \sin 90°}{\cos 0° - \cos 90°}$.

2.4.° Обчисліть:
1) $4\cos 90° + 2\cos 180° - \operatorname{ctg} 90°$;
2) $\cos 0° - \cos 180° + \sin 90° + \operatorname{tg} 180°$.

2.5.° Чому дорівнює синус кута, якщо його косинус дорівнює: 1) 1; 2) 0?

2.6.° Чому дорівнює косинус кута, якщо його синус дорівнює: 1) 1; 2) 0?

2.7.° Чому дорівнює тангенс кута, якщо його котангенс дорівнює: 1) 1; 2) $-\frac{1}{3}$?

2.8.° Чому дорівнює котангенс кута, якщо його тангенс дорівнює: 1) −1; 2) 3?

2.9.° Знайдіть $\sin 135°$, $\cos 135°$, $\operatorname{tg} 135°$, $\operatorname{ctg} 135°$.

2.10.° Знайдіть sin 150°, cos 150°, tg 150°, ctg 150°.

2.11.° Чи існує кут α, для якого:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$;
2) $\sin\alpha = 0{,}3$;
3) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$;
4) $\cos\alpha = -0{,}99$;
5) $\cos\alpha = 1{,}001$;
6) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$?

2.12.° Знайдіть:

1) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ і $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$;

2) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ і $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;

3) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

4) $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = -0{,}8$;

5) $\mathrm{tg}\,\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ і $90° < \alpha \leqslant 180°$;

6) $\mathrm{ctg}\,\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ і $0° < \alpha \leqslant 90°$.

2.13.° Знайдіть:

1) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ і $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;

2) $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{1}{6}$;

3) $\mathrm{tg}\,\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ і $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$;

4) $\mathrm{ctg}\,\alpha$, якщо $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$.

2.14.° Чи є правильним твердження (відповідь обґрунтуйте):

1) косинус гострого кута більший за косинус тупого кута;
2) існує тупий кут, синус і косинус якого рівні;
3) існує кут, синус і косинус якого дорівнюють нулю;
4) косинус кута трикутника є невід’ємним числом;
5) синус кута трикутника може дорівнювати від’ємному числу;
6) косинус кута трикутника може дорівнювати нулю;
7) синус кута трикутника може дорівнювати нулю;

8) косинус кута трикутника може дорівнювати –1;
9) синус кута трикутника може дорівнювати 1;
10) синус кута, відмінного від прямого, менший від синуса прямого кута;
11) косинус розгорнутого кута менший від косинуса кута, відмінного від розгорнутого;
12) синуси суміжних кутів рівні;
13) косинуси нерівних суміжних кутів є протилежними числами;
14) якщо косинуси двох кутів рівні, то рівні й самі кути;
15) якщо синуси двох кутів рівні, то рівні й самі кути;
16) тангенс гострого кута більший за тангенс тупого кута;
17) тангенс гострого кута більший за котангенс тупого кута?

2.15.° Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin 110° \cos 140°$;
2) $\sin 80° \cos 100° \cos 148°$;
3) $\sin 128° \cos^2 130° \operatorname{tg} 92°$;
4) $\sin 70° \cos 90° \operatorname{tg} 104°$;
5) $\operatorname{ctg} 100° \sin 114° \cos 11°$;
6) $\cos 85° \sin 171° \operatorname{ctg} 87°$.

2.16.° Знайдіть значення виразу:

1) $2 \sin 120° + 4 \cos 150° - 2 \operatorname{tg} 135°$;
2) $\cos 120° - 8 \sin^2 150° + 3 \cos 90° \cos 162°$;
3) $\cos 180° (\sin 135° \operatorname{tg} 60° - \cos 135°)^2$;
4) $2 \sin^2 30° + \cos^2 60° + \sin^2 45° + \operatorname{tg}^2 60° - \operatorname{ctg}^2 30°$.

2.17.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $2 \sin 150° - 4 \cos 120° + 2 \operatorname{tg} 135°$;
2) $\operatorname{tg} 45° \sin 60° \operatorname{ctg} 30°$;
3) $\sin 90° (\operatorname{tg} 150° \cos 135° - \operatorname{tg} 120° \cos 135°)^2$?

2.18.° Знайдіть значення виразу, не користуючись таблицями і калькулятором:

1) $\dfrac{\sin 18°}{\sin 162°}$; 2) $\dfrac{\cos 18°}{\cos 162°}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg} 18°}{\operatorname{tg} 162°}$; 4) $\dfrac{\operatorname{ctg} 18°}{\operatorname{ctg} 162°}$.

2.19.° Обчисліть:

1) $\dfrac{\cos 49°}{\cos 131°}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg} 12°}{\operatorname{tg} 168°}$; 3) $\dfrac{\sin 53°}{\sin 127°}$.

2.20.° Знайдіть суму квадратів синусів усіх кутів прямокутного трикутника.

2.21.° Знайдіть суму квадратів косинусів усіх кутів прямокутного трикутника.

2.22.$^\circ$ Порівняйте:

1) $\sin 17^\circ$ і $\sin 35^\circ$; 3) $\cos 89^\circ$ і $\cos 113^\circ$; 5) $\frac{1}{2}$ і $\sin 40^\circ$;

2) $\cos 1^\circ$ і $\cos 2^\circ$; 4) $\sin 50^\circ$ і $\sin 140^\circ$; 6) $-\frac{1}{2}$ і $\cos 130^\circ$.

2.23.$^\circ$ Порівняйте:

1) $\sin 118^\circ$ і $\sin 91^\circ$; 3) $\cos 75^\circ$ і $\cos 175^\circ$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\cos 20^\circ$;

2) $\cos 179^\circ$ і $\cos 160^\circ$; 4) $\sin 70^\circ$ і $\sin 105^\circ$; 6) $\frac{1}{2}$ і $\sin 130^\circ$.

2.24.$^\circ$ У трикутнику ABC відомо, що $\angle B = 60^\circ$, точка O — центр вписаного кола. Чому дорівнює косинус кута AOC?

2.25.$^\circ$ Точка O — центр вписаного кола трикутника ABC. Відомо, що $\cos \angle BOC = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Знайдіть кут A трикутника.

2.26.$^\bullet$ У непрямокутному трикутнику ABC відомо, що $\angle B = 30^\circ$, точка H — ортоцентр. Чому дорівнює тангенс кута AHC?

2.27.$^\bullet$ Точка H — ортоцентр трикутника ABC. Відомо, що $\cos \angle AHC = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Знайдіть кут B трикутника.

2.28.$^\bullet$ Точка O — центр вписаного кола трикутника ABC. Відомо, що $\sin \angle AOC = \frac{1}{2}$. Знайдіть кут B трикутника.

2.29.$^\bullet$ Точка H — ортоцентр трикутника ABC. Відомо, що $\sin \angle AHC = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Знайдіть кут B трикутника.

2.30.$^\bullet$ Точка O — центр описаного кола трикутника ABC. Відомо, що $\sin \angle AOC = \frac{1}{2}$. Знайдіть кут B трикутника.

2.31.$^{\bullet\bullet}$ Обчисліть $\operatorname{ctg} 5^\circ \operatorname{ctg} 15^\circ \operatorname{ctg} 25^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{ctg} 75^\circ \operatorname{ctg} 85^\circ$.

2.32.$^{\bullet\bullet}$ Обчисліть $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 80^\circ$.

3. Теорема косинусів

З першої ознаки рівності трикутників випливає, що дві сторони і кут між ними однозначно визначають трикутник. Отже, за вказаними елементами можна знайти третю сторону трикутника. Як це зробити, показує така теорема.

Теорема 3.1 (теорема косинусів). ***Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін і косинуса кута між ними.***

Доведення. Розглянемо трикутник ABC. Доведемо, наприклад, що $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

Можливі три випадки:

1) кут A — гострий;
2) кут A — тупий;
3) кут A — прямий.

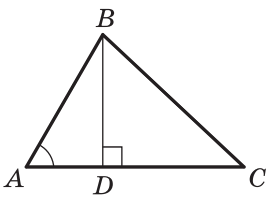

Рис. 3.1

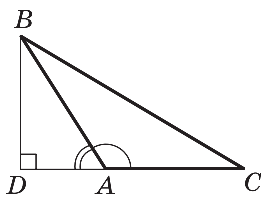

Рис. 3.2

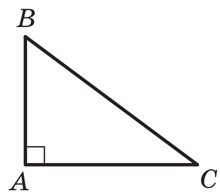

Рис. 3.3

• Розглянемо перший випадок. Якщо $\angle A < 90°$, тоді хоча б один з кутів B і C є гострим. Нехай, наприклад, $\angle C < 90°$. Проведемо висоту BD (рис. 3.1).

З ΔABD отримуємо: $BD = AB \cdot \sin A$, $AD = AB \cdot \cos A$.

З ΔBDC отримуємо: $BC^2 = BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC - AD)^2 =$

$$= AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 =$$
$$= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A =$$
$$= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A =$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Якщо $\angle C \geqslant 90°$, то $\angle B < 90°$. Тоді потрібно провести висоту трикутника ABC з вершини C. Далі доведення аналогічне розглянутому.

• Для випадку, коли кут A — тупий, проведемо висоту BD трикутника ABC (рис. 3.2).

З $\Delta\ ABD$ отримуємо: $BD = AB \cdot \sin \angle BAD =$

$$= AB \cdot \sin (180° - \angle BAC) = AB \cdot \sin \angle BAC,$$

$AD = AB \cdot \cos \angle BAD = AB \cdot \cos (180° - \angle BAC) = -AB \cdot \cos \angle BAC$.

З ΔBDC отримуємо: $BC^2 = BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC + AD)^2 =$

$$= AB^2 \cdot \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos \angle BAC)^2 =$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2\, AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC.$$

• Якщо кут A — прямий (рис. 3.3), то $\cos A = 0$. Рівність, яку потрібно довести, набуває вигляду

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

і виражає теорему Піфагора для трикутника ABC ($\angle A = 90°$). ▲

Та частина доведення, у якій розглянуто випадок, коли $\angle A$ — прямий, показує, що теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів. Тому теорема косинусів є узагальненням теореми Піфагора.

Якщо скористатися позначенням для сторін і кутів трикутника ABC (див. форзац), то, наприклад, для сторони a можна записати:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

За допомогою теореми косинусів, знаючи три сторони трикутника, можна визначити, чи є він гострокутним, тупокутним або прямокутним.

Теорема 3.2 (наслідок з теореми косинусів). ***Нехай a, b і c — сторони трикутника ABC, причому a — його найбільша сторона. Якщо $a^2 < b^2 + c^2$, то трикутник є гострокутним. Якщо $a^2 > b^2 + c^2$, то трикутник є тупокутним. Якщо $a^2 = b^2 + c^2$, то трикутник є прямокутним.***

Доведення. Маємо:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

Звідси $2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$.

Нехай $a^2 < b^2 + c^2$. Тоді $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Отже, $2bc \cos \alpha > 0$, тобто $\cos \alpha > 0$. Тому кут α — гострий.

Оскільки a — найбільша сторона трикутника, то проти неї лежить найбільший кут, який на підставі вищедоведеного є гострим. Отже, у цьому випадку трикутник є гострокутним.

Нехай $a^2 > b^2 + c^2$. Тоді $b^2 + c^2 - a^2 < 0$. Отже, $2bc \cos \alpha < 0$, тобто $\cos \alpha < 0$. Тому кут α — тупий.

Нехай $a^2 = b^2 + c^2$. Тоді $2bc \cos \alpha = 0$, тобто $\cos \alpha = 0$. Звідси $\alpha = 90°$. ▲

Теорема 3.3. ***Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.***

Доведення. На рисунку 3.4 зображено паралелограм $ABCD$.

Нехай $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $\angle BAD = \alpha$, тоді $\angle ADC = 180^\circ - \alpha$.

З ΔABD за теоремою косинусів

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \qquad (1)$$

З ΔACD за теоремою косинусів

$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha)$ або

$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha. \qquad (2)$$

Додавши рівності (1) і (2), отримаємо

$$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2. \blacktriangle$$

Задача. Доведіть, що у трикутнику ABC (див. позначення на форзаці):

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

$$m_b^2 = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4},$$

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Розв'язання. Нехай відрізок BM — медіана трикутника ABC. На промені BM позначимо таку точку D, що $BM = MD$ (рис. 3.5). Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

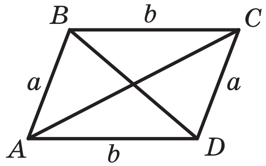

Рис. 3.4

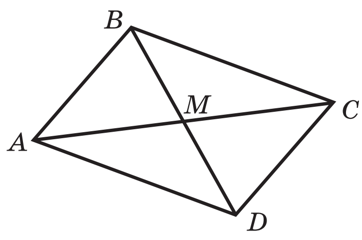

Рис. 3.5

Використовуючи теорему 3.3, можна записати

$BD^2 + AC^2 = 2AB^2 + 2BC^2$ або $4m_b^2 + b^2 = 2c^2 + 2a^2$.

Звідси $m_b^2 = \dfrac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}$.

Аналогічно доводяться дві інші формули.

Приклад 1. На стороні AC трикутника ABC позначено точку D так, що $CD : AD = 1 : 2$. Знайдіть відрізок BD, якщо $AB = 14$ см, $BC = 13$ см, $AC = 15$ см.

Розв'язання. За теоремою косинусів з ΔABC (рис. 3.6): $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$, звідси

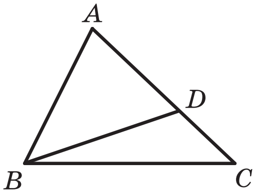

Рис. 3.6

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{225 + 169 - 196}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{33}{65}.$$

Оскільки $CD : AD = 1 : 2$, то

$$CD = \frac{1}{3} AC = 5 \text{ см}.$$

Тоді з ΔBCD:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C = 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \frac{33}{65} = 128.$$

Отже, $BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ (см).

Відповідь: $8\sqrt{2}$ см.

Приклад 2. На діаметрі AB кола з центром у точці O взято точки M і N так, що $OM = ON$. На колі позначили точку X. Доведіть, що сума $XM^2 + XN^2$ не залежить від вибору точки X.

Розв'язання. Нехай X — точка кола, відмінна від точок A і B. Тоді радіус OX — медіана трикутника MXN (рис. 3.7). Скориставшися ключовою задачею, запишемо:

$$XO^2 = \frac{2XM^2 + 2XN^2 - MN^2}{4}.$$

Звідси $XM^2 + XN^2 = \dfrac{4XO^2 + MN^2}{2}$.

Оскільки XO — радіус даного кола, то значення правої частини останньої рівності не залежить від вибору точки X.

Випадок, коли точка X збігається з точкою A або точкою B, розгляньте самостійно.

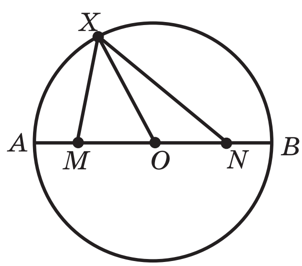

Рис. 3.7

Приклад 3. Відомо, що довжина найбільшої сторони трикутника дорівнює $\sqrt{3}$. Доведіть, що три круги з центрами у вершинах трикутника і радіусами 1 повністю покривають трикутник.

Р о з в’я з а н н я. Очевидно, що ці круги покривають сторони трикутника.

Нехай у трикутнику ABC знайшлася непокрита точка O, яка не належить сторонам. Очевидно, що один з кутів AOB, BOC, COA не менший від $120°$.

Нехай, наприклад, це кут AOC. Тоді $\cos \angle AOC \leqslant -\frac{1}{2}$. З ΔAOC за теоремою косинусів $AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cdot \cos \angle AOC \geqslant$ $\geqslant OA^2 + OC^2 + OA \cdot OC$. З умови випливає, що $AC^2 \leqslant 3$. Тоді $OA^2 +$ $+ OC^2 + OA \cdot OC \leqslant 3$. Оскільки точка O не покрита, то $OA > 1$ і $OC > 1$. Тоді $OA^2 + OC^2 + OA \cdot OC > 3$. Отримали суперечність. Отже, точок трикутника, не покритих одним з указаних кругів, не існує.

П р и к л а д 4. Додатні числа a, b, c такі, що $c^2 = a^2 + b^2 - ab$. Доведіть, що $(a - c)(b - c) \leqslant 0$.

Р о з в’я з а н н я. Побудуємо кут MON, який дорівнює $60°$. На його сторонах OM і ON позначимо відповідно точки A і B так, що $OA = a$, $OB = b$ (рис. 3.8). За теоремою косинусів $AB^2 = a^2 + b^2 - ab$. Отже, $AB = c$.

У трикутнику OAB один з кутів A і B не менший від $60°$, а другий не більший за $60°$. Отже, у трикутнику OAB сторона c не менша від однієї з двох інших сторін і не більша за другу. Звідси $(a - c)(b - c) \leqslant 0$.

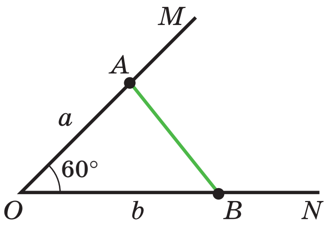

Рис. 3.8

ВПРАВИ

3.1.° Знайдіть невідому сторону трикутника ABC, якщо:

1) $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$;

2) $AB = 3$ см, $AC = 2\sqrt{2}$ см, $\angle A = 135°$.

3.2.° Знайдіть невідому сторону трикутника DEF, якщо:

1) $DE = 4$ см, $DF = 2\sqrt{3}$ см, $\angle D = 30°$;

2) $DF = 3$ см, $EF = 5$ см, $\angle F = 120°$.

3.3.° Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 20 см і 28 см. Знайдіть найбільший кут трикутника.

3.4.° Сторони трикутника дорівнюють $\sqrt{18}$ см, 5 см і 7 см. Знайдіть середній за величиною кут трикутника.

3.5.° Установіть, гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник, сторони якого дорівнюють:

1) 5 см, 7 см і 9 см; 3) 10 см, 15 см і 18 см.

2) 5 см, 12 см і 13 см;

3.6.° Сторони трикутника дорівнюють 7 см, 8 см і 12 см. Чи є правильним твердження, що даний трикутник є гострокутним?

3.7.° Доведіть, що трикутник зі сторонами 8 см, 15 см і 17 см є прямокутним.

3.8.° Сторони паралелограма дорівнюють $2\sqrt{2}$ см і 5 см, а один з кутів дорівнює 45°. Знайдіть діагоналі паралелограма.

3.9.° У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $BC = 3$ см, $AD = 10$ см, $CD = 4$ см, $\angle D = 60°$. Знайдіть діагоналі трапеції.

3.10.° На стороні AB рівностороннього трикутника ABC позначено точку D так, що $AD : DB = 2 : 1$. Знайдіть відрізок CD, якщо $AB = 6$ см.

3.11.° На гіпотенузі AB трикутника ABC позначено точку M так, що $AM : BM = 1 : 3$. Знайдіть відрізок CM, якщо $AC = BC = 4$ см.

3.12.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AC = 20$ см, $BC = 15$ см. На стороні AB позначено точку M так, що $BM = 4$ см. Знайдіть довжину відрізка CM.

3.13.° На продовженні гіпотенузи AB прямокутного рівнобедреного трикутника ABC за точку B позначено точку D так, що $BD = BC$. Знайдіть відрізок CD, якщо катет трикутника ABC дорівнює a.

3.14.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AB = 13$ см, $AC = 12$ см. На продовженні гіпотенузи AB за точку B позначено точку D так, що $BD = 26$ см. Знайдіть довжину відрізка CD.

3.15.° Центр кола, вписаного в прямокутний трикутник, знаходиться на відстанях a і b від кінців гіпотенузи. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

3.16.° Точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC, $BC = a$, $AC = b$, $\angle AOB = 120°$. Знайдіть сторону AB.

3.17.° Дві сторони трикутника, кут між якими дорівнює 60°, відносяться як 5 : 8, а третя сторона дорівнює 21 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

3.18.° Дві сторони трикутника відносяться як $1:2\sqrt{3}$ і утворюють кут у 30°. Третя сторона трикутника дорівнює $2\sqrt{7}$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

3.19.° Сума двох сторін трикутника, які утворюють кут у 120°, дорівнює 8 см, а довжина третьої сторони становить 7 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

3.20.° Дві сторони трикутника, кут між якими дорівнює 120°, відносяться як 5 : 3. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 30 см.

3.21.° Дві сторони трикутника дорівнюють 16 см і 14 см, а кут, протилежний меншій з відомих сторін, дорівнює 60°. Знайдіть невідому сторону трикутника.

3.22.° Дві сторони трикутника дорівнюють 15 см і 35 см, а кут, протилежний більшій з відомих сторін, дорівнює 120°. Знайдіть периметр трикутника.

3.23.° Одна із сторін трикутника у 2 рази більша за другу, а кут між цими сторонами становить 60°. Доведіть, що даний трикутник є прямокутним.

3.24.° Доведіть, що коли квадрат сторони трикутника дорівнює неповному квадрату суми двох інших сторін, то протилежний цій стороні кут дорівнює 120°.

3.25.° Доведіть, що коли квадрат сторони трикутника дорівнює неповному квадрату різниці двох інших сторін, то протилежний цій стороні кут дорівнює 60°.

3.26.° Дві сторони паралелограма дорівнюють 7 см і 11 см, а одна з діагоналей — 12 см. Знайдіть другу діагональ паралелограма.

3.27.° Діагоналі паралелограма дорівнюють 13 см і 11 см, а одна зі сторін — 9 см. Знайдіть периметр паралелограма.

3.28.° Діагоналі паралелограма дорівнюють 8 см і 14 см, а одна зі сторін на 2 см більша за другу. Знайдіть сторони паралелограма.

3.29.° Сторони паралелограма дорівнюють 11 см і 23 см, а його діагоналі відносяться як 2 : 3. Знайдіть діагоналі паралелограма.

3.30.° Сторони трикутника дорівнюють 16 см, 18 см і 26 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до його більшої сторони.

3.31.° Дві сторони трикутника дорівнюють 12 см і 14 см, а медіана, проведена до третьої сторони, — 7 см. Знайдіть невідому сторону трикутника.

3.32.• Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 4 см, а синус кута між ними дорівнює $\frac{\sqrt{35}}{6}$. Знайдіть третю сторону трикутника.

3.33.° На стороні BC трикутника ABC позначено точку D так, що $CD = 14$ см. Знайдіть відрізок AD, якщо $AB = 37$ см, $BC = 44$ см і $AC = 15$ см.

3.34.° На стороні AB трикутника ABC позначено точку K, а на продовженні сторони BC за точку C — точку M. Знайдіть відрізок MK, якщо $AB = 15$ см, $BC = 7$ см, $AC = 13$ см, $AK = 8$ см, $MC = 3$ см.

3.35.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, $\angle ABC = 120°$. На продовженні відрізка AB за точку B позначено точку D так, що $BD = 2AB$. Доведіть, що трикутник ACD рівнобедрений.

3.36.° Знайдіть діагональ AC чотирикутника $ABCD$, якщо навколо нього можна описати коло, і $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $CD = 5$ см, $AD = 6$ см.

3.37.° Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо $AB = 4$ см, $AD = 3$ см, $BD = 6$ см і $\angle C = 40°$?

3.38.° Доведіть, що проти більшого кута паралелограма лежить більша діагональ. Сформулюйте і доведіть обернене твердження.

3.39.° Основа рівнобедреного трикутника дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а медіана, проведена до бічної сторони, — 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

3.40.° Доведіть, що в трикутнику ABC виконується рівність $\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}$.

3.41.° Доведіть, що коли в трикутнику ABC виконується рівність $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$, то цей трикутник є прямокутним.

3.42.° Доведіть, що коли в трикутнику ABC виконується рівність $a^2 + b^2 = 5c^2$, то медіани, проведені з вершин A і B, перпендикулярні.

3.43.° Доведіть, що сума квадратів довжин медіан трикутника не менша від квадрата його півпериметра.

3.44.° Дано два кола, які мають спільний центр (такі кола називають концентричними). Доведіть, що сума квадратів відстаней від точки одного з кіл до кінців діаметра другого кола не залежить ні від обраної точки, ні від обраного діаметра.

3.45.°° Доведіть, що сума квадратів діагоналей чотирикутника в два рази більша за суму квадратів відрізків, які з'єднують середини протилежних сторін.

3.46.$^{\bullet\bullet}$ В опуклому чотирикутнику відрізки, які з'єднують середини протилежних сторін, дорівнюють m і n, кут між ними дорівнює $60°$. Знайдіть діагоналі чотирикутника.

3.47.$^{\bullet\bullet}$ Діагоналі опуклого чотирикутника дорівнюють a і b, кут між ними дорівнює $45°$. Знайдіть відрізки, які з'єднують середини протилежних сторін чотирикутника.

3.48.$^{\bullet\bullet}$ Відстань між серединами діагоналей трапеції дорівнює 5 см, а її бічні сторони дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть відстань між серединами основ.

3.49.$^{\bullet\bullet}$ У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) відомо, що $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $AD = 16$ см, $\cos A = \frac{1}{7}$. Знайдіть сторону CD трапеції.

3.50.$^{\bullet\bullet}$ У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) відомо, що $AB = \sqrt{15}$ см, $BC = 6$ см, $CD = 4$ см, $AD = 11$ см. Знайдіть косинус кута D трапеції.

3.51.$^{\bullet\bullet}$ У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $BC = 1$ см, $AD = 6$ см, $AC = 3$ см, $BD = 5$ см. Знайдіть кут AOD, де O — точка перетину діагоналей трапеції.

3.52.$^{\bullet\bullet}$ У трикутнику ABC проведено висоти AA_1 і CC_1. Відомо, що $A_1C_1 : AC = \frac{1}{2}$, $AB = c$, $BC = a$. Знайдіть AC.

3.53.$^{\bullet\bullet}$ З вершини D ромба $ABCD$ до сторони BC проведено висоту DE. Діагональ AC перетинає відрізок DE в точці F так, що $DF : FE = 5 : 1$. Знайдіть сторону ромба, якщо $AE = 35$ см.

3.54.$^{\bullet\bullet}$ В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, причому $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Доведіть, що діагоналі цього чотирикутника перпендикулярні.

3.55.$^{\bullet\bullet}$ У паралелограмі $ABCD$ діагоналі AC і BD перетинаються в точці O. Відомо, що $AB = a$, $BC = b$ ($a \geqslant b$), $\angle BOC = \alpha$. Доведіть, що $\cos\alpha \geqslant \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

3.56.$^{\bullet\bullet}$ На діаметрі кола з центром O радіуса R позначили точку M. Доведіть, що сума квадратів відстаней від точки M до кінців хорди, паралельної цьому діаметру, не залежить від вибору хорди.

3.57.$^{\bullet\bullet}$ Кожна із сторін опуклого чотирикутника не більша за 7 см. Доведіть, що для будь-якої точки чотирикутника знайдеться вершина, відстань від якої до цієї точки менша від 5 см.

3.58.* (теорема Стюарта). На стороні BC трикутника ABC взято точку D. Доведіть, що

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$$

3.59.* Знайдіть найменше значення виразу

$$\sqrt{1+x^2-x}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}.$$

3.60.* Доведіть, що $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}} \geqslant \sqrt{3}.$

3.61.* Доведіть, що для додатних чисел a, b і c виконується нерівність

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2} \geqslant \sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

3.62.* Чи існують такі три точки A, B і C, що для будь-якої точки X хоча б один з відрізків XA, XB, XC має ірраціональну довжину?

4. Теорема синусів

З другої ознаки рівності трикутників випливає, що сторона і два прилеглих до неї кути однозначно визначають трикутник. Отже, за вказаними елементами можна знайти дві інші сторони трикутника. Як це зробити, підказує така теорема.

Теорема 4.1 (теорема синусів). ***Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.***

Лема. ***Хорда кола дорівнює добутку діаметра на синус будь-якого вписаного кута, який спирається на цю хорду.***

Доведення. На рисунку 4.1 відрізок MN — хорда кола з центром у точці O. Проведемо діаметр MP. Тоді $\angle MNP = 90^\circ$ як вписаний кут, що спирається на діаметр. Нехай величина вписаного кута MPN дорівнює α. Тоді з прямокутного трикутника MPN отримуємо

$$MN = MP \sin \alpha. \qquad (1)$$

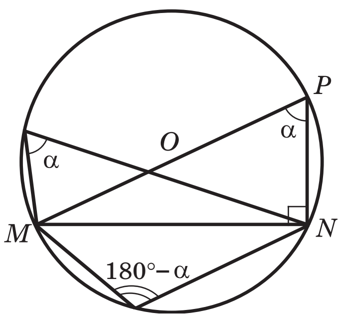

Рис. 4.1

Усі вписані кути, які спираються на хорду MN, дорівнюють α або $180^\circ - \alpha$. Отже, їх синуси рівні. Тому отримана рівність (1) справедлива для всіх вписаних кутів, які спираються на хорду MN. ▲

Тепер ми можемо довести теорему синусів.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Доведемо, що

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Нехай радіус описаного кола трикутника ABC дорівнює R. Тоді за лемою $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. Звідси

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$ ▲

Наслідок. ***Радіус описаного кола трикутника можна обчислити за формулою***

$$\boxed{\boldsymbol{R = \frac{a}{2\sin\alpha}},}$$

де a — сторона трикутника, α ***— протилежний їй кут.***

Приклад 1. У трикутнику ABC відомо, що $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 45°$. Знайдіть кут A.

Розв'язання. За теоремою синусів

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Тоді маємо:

$$\sin A = \frac{BC \sin B}{AC} = \frac{1 \cdot \sin 45°}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Отже, $\angle A$ — гострий. Звідси, ураховуючи, що $\sin A = \frac{1}{2}$, отримуємо $\angle A = 30°$.

Відповідь: $\angle A = 30°$.

Приклад 2. У трикутнику ABC відомо, що $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle A = 30°$. Знайдіть кут B.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B},$$

$$\sin B = \frac{AC \sin A}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Оскільки $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Тоді кут B може бути як гострим, так і тупим. Звідси $\angle B = 45°$ або $\angle B = 180° - 45° = 135°$.

Відповідь: $45°$ або $135°$.

Приклад 3. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC, $\angle B = 30°$, $\angle C = 105°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо радіус кола, описаного навколо трикутника BDC, дорівнює $8\sqrt{6}$ см.

Розв'язання. Нехай R_1 — радіус кола, описаного навколо трикутника BDC (рис. 4.2), $R_1 = 8\sqrt{6}$ см.

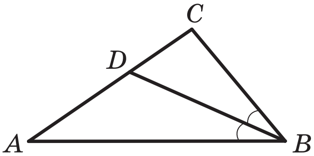

Рис. 4.2

$$\angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = 15°.$$

З ΔBDC:

$\angle BDC = 180° - (\angle CBD + \angle C) = 180° - (15° + 105°) = 60°$.

Тоді $\dfrac{BC}{\sin\angle BDC} = 2R_1$, звідси

$$BC = 2R_1 \sin\angle BDC = 2\cdot 8\sqrt{6}\sin 60° = 24\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

З ΔABC:

$\angle A = 180° - (\angle ABC + \angle C) = 180° - (30° + 105°) = 45°$.

Нехай R — шуканий радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.

Тоді $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R$, звідси $R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{24\sqrt{2}}{2\sin 45°} = 24$ (см).

Відповідь: 24 см.

Приклад 4. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 21 см і 9 см, а висота — 8 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

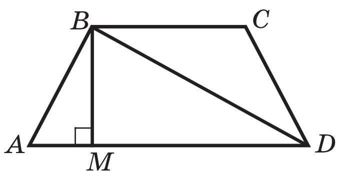

Рис. 4.3

Розв'язання. Проведемо висоту BM рівнобічної трапеції $ABCD$ (рис. 4.3). Відомо[1], що

$$AM = \frac{AD - BC}{2},$$

[1] Див. ключову задачу пункту 10 книги «А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Геометрія. Підручник для 8 класу з поглибленим вивченням математики. – Харків: Гімназія, 2008». Далі посилатимемося на цю книгу так: «Геометрія-8».

$MD = \frac{BC + AD}{2}$. Маємо: $AM = 6$ см, $MD = 15$ см.

З ΔABM отримуємо: $AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см), $\sin A = \frac{BM}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

З ΔMBD отримуємо: $BD = \sqrt{BM^2 + MD^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ (см).

Коло, описане навколо трапеції $ABCD$, є також описаним колом трикутника ABD. Відрізок BD — хорда цього кола, $\angle A$ — вписаний кут, що спирається на цю хорду. Позначивши шуканий радіус R, можна записати: $BD = 2R \cdot \sin A$. Звідси $R = \frac{BD}{2\sin A} = \frac{17}{2 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{85}{8}$ (см).

Приклад 5. На найбільшій стороні AC трикутника ABC позначено точку X, відмінну від вершин A і C. З точки X опущено перпендикуляри XM і XN на прямі AB і BC відповідно. Знайдіть таке положення точки X, при якому довжина відрізка MN буде найменшою.

Розв'язання. На рисунку 4.4 показано випадок, коли точки M і N лежать на сторонах трикутника, а на рисунку 4.5 — випадок, коли тільки одна точка, наприклад точка M, лежить на стороні трикутника.

Легко показати, що точки M, B, N, X лежать на одному колі з діаметром BX. Відрізок MN — хорда цього кола, на яку спирається кут B (рис. 4.4) або кут, суміжний з кутом B (рис. 4.5). Для кожного з цих випадків можна записати $MN = BX \cdot \sin B$. Отже, довжина відрізка MN набуває найменшого значення, якщо набуває найменшого значення довжина відрізка BX. А ця умова досягається тоді, коли точка X є основою висоти трикутника ABC, проведеної з вершини B.

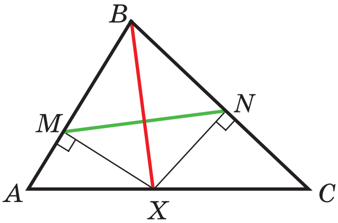

Рис. 4.4

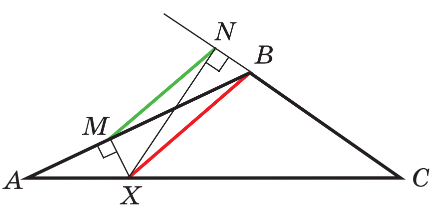

Рис. 4.5

ВПРАВИ

4.1.° Знайдіть сторону BC трикутника ABC, зображеного на рисунку 4.6 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

4.2.° Знайдіть кут A трикутника ABC, зображеного на рисунку 4.7 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

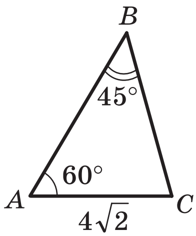

Рис. 4.6

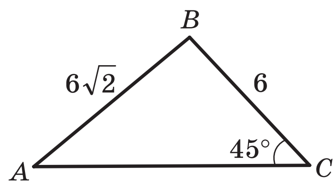

Рис. 4.7

4.3.° Знайдіть сторону AB трикутника ABC, якщо $AC = \sqrt{6}$ см, $\angle B = 120°$, $\angle C = 45°$.

4.4.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, $\sin A = 0{,}2$. Знайдіть синус кута C трикутника.

4.5.° У трикутнику ABC відомо, що $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Знайдіть AB і AC.

4.6.° Діагональ паралелограма дорівнює d і утворює з його сторонами кути α і β. Знайдіть сторони паралелограма.

4.7.° Знайдіть кут A трикутника ABC, якщо:

1) $AC = 2$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 135°$;

2) $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle B = 45°$.

Скільки розв'язків у кожному з випадків має задача? Відповідь обґрунтуйте.

4.8.° Чи існує трикутник ABC такий, що $\sin A = 0{,}4$, $AC = 18$ см, $BC = 6$ см? Відповідь обґрунтуйте.

4.9.° На продовженні сторони AB трикутника ABC за точку B позначено точку D. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ACD, якщо $\angle ABC = 60°$, $\angle ADC = 45°$, а радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює 4 см.

4.10.° Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює 6 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника AOC, де O — точка перетину бісектрис трикутника ABC, якщо $\angle ABC = 60°$.

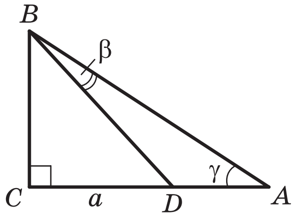

Рис. 4.8

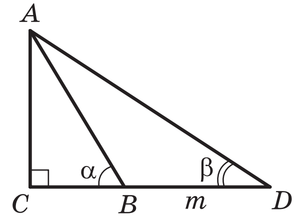

Рис. 4.9

4.11.° За рисунком 4.8 знайдіть AD, якщо $CD = a$.

4.12.° За рисунком 4.9 знайдіть AC, якщо $BD = m$.

4.13.° На стороні AB трикутника ABC позначено точку M так, що $\angle AMC = \varphi$. Знайдіть відрізок CM, якщо $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$.

4.14.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. На стороні BC позначено точку D так, що $\angle ADB = \varphi$, $AD = m$. Знайдіть сторону BC.

4.15.• Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, де A, B і C — кути даного трикутника ABC.

4.16.• Доведіть, користуючись теоремою синусів, що бісектриса трикутника поділяє його сторону на відрізки, довжини яких пропорційні прилеглим сторонам[1].

4.17.• Доведіть, що бісектриса трикутника поділяє його сторону на відрізки, довжини яких обернено пропорційні синусам прилеглих до цієї сторони кутів.

4.18.• Для сторін і кутів трикутника ABC виконується рівність $\frac{BC}{\cos A} = \frac{AC}{\cos B}$. Доведіть, що $AC = BC$.

4.19.• Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 12 см, а висота, проведена до третьої сторони, — 4 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даного трикутника.

4.20.• Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою 16 см і бічною стороною 10 см.

4.21.• Сторона трикутника дорівнює 24 см, а радіус описаного кола — $8\sqrt{3}$ см. Чому дорівнює кут трикутника, протилежний даній стороні?

4.22.• У трикутнику ABC $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Знайдіть бісектрису BD трикутника.

[1] Нагадаємо, що цей факт було доведено у 8 класі з використанням теореми про пропорційні відрізки (див. «Геометрія-8», п. 16, теорема 16.2).

4.23.$^{\bullet}$ Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, протилежний їй кут дорівнює α. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини кута при основі.

4.24.$^{\bullet}$ Відрізок CD — бісектриса трикутника ABC, у якому $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Через точку D проведено пряму, яка паралельна стороні BC і перетинає сторону AC у точці E, причому $AE = a$. Знайдіть CE.

4.25.$^{\bullet}$ Медіана AM трикутника ABC дорівнює m і утворює зі сторонами AB і AC кути α і β відповідно. Знайдіть сторони AB і AC.

4.26.$^{\bullet}$ Медіана CD трикутника ABC утворює зі сторонами AC і BC кути α і β відповідно, $BC = a$. Знайдіть медіану CD.

4.27.$^{\bullet}$ У прямокутному трикутнику ABC через вершини A і C і середину M гіпотенузи AB проведено коло радіуса R. Знайдіть радіус описаного кола трикутника CMB, якщо $\angle A = \alpha$.

4.28.$^{\bullet}$ Висоти непрямокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Доведіть, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників AHB, BHC, AHC і ABC, рівні.

4.29.$^{\bullet}$ Центр вписаного кола рівнобедреного трикутника ділить висоту, проведену до основи, на відрізки завдовжки 5 см і 3 см, рахуючи від вершини. Знайдіть радіус описаного кола.

4.30.$^{\bullet\bullet}$ Діагоналі описаного чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Радіуси описаних кіл трикутників AOB, BOC, COD, DOA відповідно дорівнюють R_1, R_2, R_3, R_4. Доведіть, що $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$.

4.31.$^{\bullet\bullet}$ На стороні AB трикутника ABC позначено точки M і N. Відомо, що радіуси описаних кіл трикутників ANC і BMC рівні. Крім того, радіуси описаних кіл трикутників AMC і BNC також рівні. Доведіть, що трикутник ABC є рівнобедреним.

4.32.$^{\bullet\bullet}$ З точки M кола проведено три хорди $MN = 1$ см, $MP = 6$ см, $MQ = 2$ см. Відомо, що $\angle NMP = \angle PMQ$. Знайдіть радіус кола.

4.33.$^{\bullet\bullet}$ З точки M, яка належить куту, на його сторони AB і AC опустили перпендикуляри, які дорівнюють $\sqrt{7}$ см і $2\sqrt{7}$ см. Знайдіть MA, якщо $\angle A = 60^\circ$.

4.34.$^{\bullet\bullet}$ Дано дві прямі, які перетинаються і кут між якими дорівнює α. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що відстань між основами перпендикулярів, проведених з точки X до даних прямих, дорівнює заданій величині a.

4.35.•• З точки M кола на його діаметри AB і CD опустили перпендикуляри. Доведіть, що відстань між основами перпендикулярів не залежить від вибору точки M.

4.36.•• Навколо трикутника ABC описано коло. З довільної точки M кола проведено перпендикуляри MN і MK до прямих AB і AC відповідно. Для якої точки M довжина відрізка NK є максимальною?

4.37.•• Бісектриси трикутника ABC перетинаються в точці O. Пряма AO вдруге перетинає описане коло трикутника BOC в точці M. Знайдіть OM, якщо $BC = 3$ см, $\angle BAC = 120°$.

4.38.•• Точка J — центр вписаного кола трикутника ABC. Пряма AJ вдруге перетинає описане коло трикутника ABC у точці D. Знайдіть DJ, якщо $BC = 6$ см, а радіус описаного кола дорівнює $2\sqrt{3}$ см.

4.39.•• У трикутнику ABC на стороні AB існує така точка D, що $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$. Доведіть, що кут C — тупий.

4.40.•• На діагоналі BD квадрата $ABCD$ позначили точку E. Нехай O_1 і O_2 — центри описаних кіл трикутників ABE і ADE відповідно. Доведіть, що чотирикутник AO_1EO_2 — квадрат.

4.41.* Діагоналі вписаного чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці K. Відомо, що $AB = a$, $CD = b$, $\angle BKA = \alpha$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо чотирикутника.

4.42.* У коло вписано чотирикутник $ABCD$ (рис. 4.10). Прямі AB і CD перетинаються в точці M, а прямі BC і AD — у точці N. Відомо, що $BM = DN$. Доведіть, що $CM = CN$.

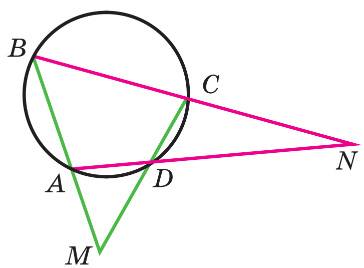

Рис. 4.10

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Тригонометрична форма теореми Чеви

У 8 класі ви вивчали теорему Чеви. Нагадаємо її.

Теорема Чеви. ***Для того щоб чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 трикутника ABC перетиналися в одній точці (рис. 4.11), необхідно й достатньо, щоб виконувалася рівність***

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (*)$$

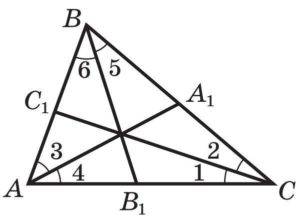

Рис. 4.11

Теорема синусів дозволяє записати критерій конкурентності прямих AA_1, BB_1, CC_1 в іншій формі.

Позначимо кути, які чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 утворюють зі сторонами трикутника ABC, так, як показано на рисунку 4.11.

З трикутника AC_1C отримуємо:

$$\frac{AC_1}{CC_1}=\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle C_1AC}.$$

З трикутника BC_1C отримуємо: $\dfrac{CC_1}{C_1B}=\dfrac{\sin\angle C_1BC}{\sin\angle 2}$.

Звідси

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle C_1AC}\cdot\frac{\sin\angle C_1BC}{\sin\angle 2}. \qquad (1)$$

Аналогічно можна показати, що

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{\sin\angle 3}{\sin\angle C_1BC}\cdot\frac{\sin\angle A_1CA}{\sin\angle 4}, \qquad (2)$$

$$\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{\sin\angle 5}{\sin\angle A_1CA}\cdot\frac{\sin\angle C_1AC}{\sin\angle 6}. \qquad (3)$$

Перемноживши рівності (1), (2) і (3), отримаємо:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{\sin\angle 1\cdot\sin\angle 3\cdot\sin\angle 5}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 6}.$$

Тоді необхідну і достатню умови конкурентності чевіан AA_1, BB_1 і CC_1 можна виразити такою рівністю:

$$\frac{\sin\angle 1\cdot\sin\angle 3\cdot\sin\angle 5}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 6}=1.$$

Приклад. Шестикутник $ABCDEF$ вписано в коло. Доведіть, що діагоналі AD, BE і CF перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли

$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA.$$

Розв'язання. Розглянемо трикутник ACE. Введемо позначення кутів так, як показано на рисунку 4.12. Нехай радіус кола дорівнює R.

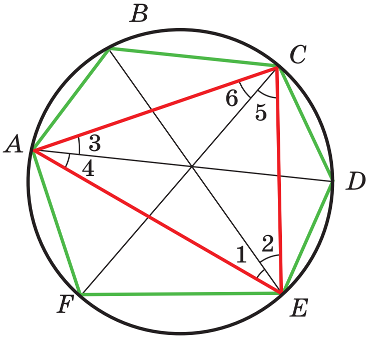

Рис. 4.12

Тоді:

$AB = 2R \sin \angle 1;$
$BC = 2R \sin \angle 2;$
$CD = 2R \sin \angle 3;$
$DE = 2R \sin \angle 4;$
$EF = 2R \sin \angle 5;$
$FA = 2R \sin \angle 6.$

Звідси $\dfrac{\sin \angle 1 \cdot \sin \angle 3 \cdot \sin \angle 5}{\sin \angle 2 \cdot \sin \angle 4 \cdot \sin \angle 6} = \dfrac{AB \cdot CD \cdot EF}{BC \cdot DE \cdot FA}.$

Діагоналі AD, BE і CF є конкурентними тоді і тільки тоді, коли ліва частина записаної рівності дорівнює 1. Звідси випливає справедливість твердження, що доводиться.

ВПРАВИ

1. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC позначено відповідно точки C_1, A_1 і B_1 так, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 конкурентні. Доведіть, що прямі AA_2, BB_2 і CC_2, симетричні прямим AA_1, BB_1 і CC_1 відносно бісектрис кутів A, B і C відповідно, також конкурентні.

2. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC позначено відповідно точки C_1, A_1 і B_1 так, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 конкурентні (рис. 4.13). На сторонах A_1B_1, B_1C_1 і C_1A_1 трикутника $A_1B_1C_1$ позначено відповідно точки C_2, A_2 і B_2 так, що прямі A_1A_2, B_1B_2 і C_1C_2 конкурентні. Доведіть, що прямі AA_2, BB_2 і CC_2 також конкурентні.

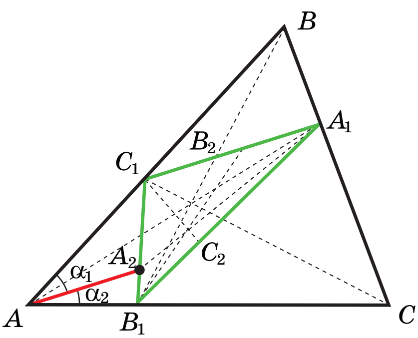

Рис. 4.13

Вказівка. Доведіть, що

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{AB_1\cdot C_1A_2}{A_2B_1\cdot AC_1}.$$

Формула Ейлера для знаходження відстані між центрами вписаного і описаного кіл трикутника

Теорема. ***Відстань d між центрами вписаного і описаного кіл трикутника обчислюється за формулою***

$$\boxed{d=\sqrt{R^2-2Rr}}$$

де r і R — відповідно радіуси його вписаного і описаного кіл.

Доведення. Нехай O_1 і O — центри вписаного і описаного кіл відповідно (рис. 4.14). Бісектриса кута B перетинає описане коло в точці D. Згідно з ключовою задачею 18.25 («Геометрія-8»)

$$BO_1\cdot O_1D=R^2-O_1O^2=R^2-d^2. \qquad (*)$$

Нехай вписане коло дотикається до сторони BC у точці K. Тоді з трикутника O_1BK отримуємо: $BO_1=\dfrac{O_1K}{\sin\angle DBC}=\dfrac{r}{\sin\angle DBC}$.

За лемою п. 4 маємо: $DC=2R\sin\angle DBC$. Згідно з ключовою задачею 11.25 («Геометрія-8») $O_1D=DC=2R\sin\angle DBC$. Отримані результати підставляємо у формулу (*):

$$\frac{r}{\sin\angle DBC}\cdot 2R\sin\angle DBC=R^2-d^2.$$

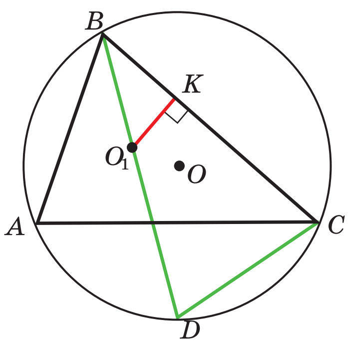

Рис. 4.14

Звідси $d^2=R^2-2Rr$. ▲

Оскільки $d^2=R^2-2Rr$, то $R^2-2Rr\geqslant 0$. Звідси отримуємо, що для будь-якого трикутника виконується нерівність

$$R\geqslant 2r.$$

У цій нерівності рівність досягається тоді і тільки тоді, коли центри вписаного і описаного кіл трикутника збігаються. Така властивість притаманна лише рівносторонньому трикутнику.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

1.6. 3 : 5. **1.21.** 126 см. **1.23.** 60°. **1.24.** 45°. **1.25.** 60° і 120°. **1.26.** $2a$. **1.40.** *Вказівка*. Доведіть, що $\Delta\, ABG = \Delta\, DBC$. **1.42.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що середини діагоналей і середини двох протилежних сторін чотирикутника є вершинами паралелограма, сторони якого дорівнюють половинам двох інших сторін чотирикутника. **1.43.** *Вказівка*. Нехай точка M — середина відрізка AB. Тоді $OM = \frac{1}{2}AB$, а $CM < \frac{1}{2}(CB + CA)$. **1.44.** *Вказівка*. Побудуйте паралелограми $ACBD$ і $BAKC$. **1.47.** *Вказівка*. Чотирикутники $AKLD$ і $KBCL$ — вписані. Нехай F — точка перетину CK і AD. Тоді $\angle\, CKD = \angle\, KFD + \angle\, KDF$. **1.48.** *Вказівка*. Скориставшись тим, що чотирикутник $AKHL$ — вписаний, доведіть, що $\angle\, BKL + \angle\, BCL = 180°$. **1.49.** *Вказівка*. Нехай O — центр описаного кола трикутника BJC. Доведіть, що чотирикутник $ABOC$ — вписаний. **1.51.** 60° або 120°. **1.52.** *Вказівка*. Із подібності трикутників ABD і ACB випливає, що $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$, звідки з урахуванням $AB = DC$ можна записати $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. **1.53.** *Вказівка*. Доведіть, що $EF \parallel AC$. **1.54.** $3\sqrt{5}$. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що CL — бісектриса кута HCM. **1.55.** *Вказівка*. $AC > AB - BC = 5$ см. Нехай $AD = 3x$, тоді $CD = 2x$, де $x > 1$. Можна записати $BD^2 = 150 - 6x^2 < 144$. **1.56.** *Вказівка*. $\Delta\, CBO \sim \Delta\, CAB$, звідси $CO \cdot CA = CB^2$. Крім того, $\Delta\, CBO \sim \Delta\, DBC$, і можна записати $BO \cdot BD = CB^2$. **1.58.** *Вказівка*. I спосіб. Нехай E — точка перетину прямих DA і CB (див. рисунок). Тоді $\frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC}$, крім того, $EB^2 = EA \cdot ED$. З двох отриманих рівностей випливає, що $ED^2 = EB \cdot EC$. II спосіб. Розглянемо трикутники ABD і CDB. Маємо: $\angle\, ABD = \angle\, CDB$, $\angle\, BAD = \angle\, CBD$. Звідси $\angle\, BDA = \angle\, BCD$. **1.59.** *Вказівка*. Доведіть, що чотирикутник $MBNK$ — вписаний, а потім скористайтеся властивістю, оберненою до властивості кута між дотичною і хордою. **1.60.** $2R\left(\sqrt{5} - 2\right)$.

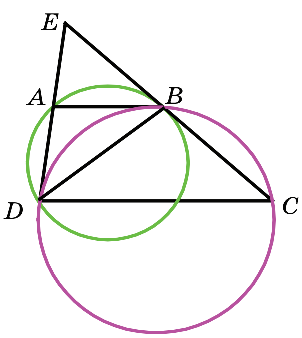

Рис. до задачі 1.58

Вказівка. Скористайтеся теоремою Птолемея. **1.61.** $\frac{bd}{b+c}$, $\frac{cd}{b+c}$. *Вказівка*. Трикутники AFC і AFB рівновеликі. **1.63.** *Вказівка*. Нехай F — точка перетину прямої BE з основою AD. Тоді площа кожного із зазначених трикутників дорівнює половині площі паралелограма $BCDF$. **1.64.** *Вказівка*. Проведіть пряму MF паралельно DE (див. рисунок). Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle MFC$. **1.65.** *Вказівка*. Доведіть, що чотирикутники $BCDM$ і $ABCM$ — паралелограми. **1.66.** *Вказівка*. Слід побудувати коло, яке проходить через точки C і D і дотикається до хорди AB. **1.67.** *Вказівка*. Нехай прямі MQ і PN перетинають пряму AC у точках F і F_1 відповідно. Застосувавши теорему Менелая до трикутника ACD і прямої MQ, а також до трикутника ACB і прямої PN, доведіть, що точки F і F_1 збігаються. **1.68.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що точка B — центр зовнівписаного кола трикутника AKC. **2.12.** 3) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ або $-\frac{\sqrt{13}}{4}$; 4) 0,6; 5) $-\frac{4}{3}$; 6) $\frac{12}{5}$. **2.13.** 1) $-\frac{12}{13}$; 2) $\frac{\sqrt{35}}{6}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $-\frac{8}{15}$. **2.16.** 1) $2-\sqrt{3}$; 2) $-2{,}5$; 3) $-\sqrt{3}-2$; 4) $\frac{5}{4}$. **2.17.** 1) 1; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$. **2.24.** $-\frac{1}{2}$. **2.25.** 120°. **2.26.** У гострокутному: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; у тупокутному: $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **2.27.** 45°. **2.28.** 120°. **2.29.** 60° або 120°. **2.30.** 15°, або 75°, або 105°, або 165°. **2.31.** 1. **2.32.** 1. **3.3.** 120°. **3.4.** 45°. **3.10.** $2\sqrt{7}$ см. **3.11.** $\sqrt{10}$ см. **3.12.** 13 см. **3.13.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **3.14.** $3\sqrt{89}$ см. **3.15.** $\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$. **3.16.** $\sqrt{a^2+b^2-ab}$. **3.17.** 15 см, 24 см. **3.18.** 2 см, $4\sqrt{3}$ см. **3.19.** 3 см, 5 см. **3.20.** 10 см, 6 см, 14 см. **3.21.** 6 см або 10 см. **3.22.** 75 см. **3.26.** 14 см. **3.27.** 34 см. **3.28.** 7 см, 9 см. **3.29.** 20 см, 30 см. **3.30.** 11 см. **3.31.** 22 см. **3.32.** $\sqrt{21}$ см або $\sqrt{29}$ см. **3.33.** 13 см. **3.34.** $\sqrt{79}$ см. **3.36.** $\sqrt{\frac{247}{7}}$ см. **3.37.** Ні. **3.39.** 6 см. **3.42.** *Вказівка*. Скориставшись ключовою

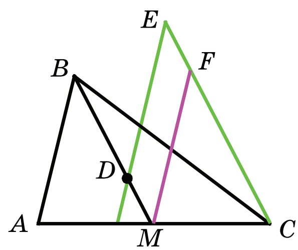

Рис. до задачі 1.64

задачею п. 3, доведіть, що $\frac{4}{9}m_a^2+\frac{4}{9}m_b^2=c^2$. **3.44.** *Вказівка.* Нехай AB — діаметр одного кола, точка X — точка другого кола. Якщо точка X не належить прямій AB, то розгляньте паралелограм, сторони якого — відрізки XA і XB. **3.45.** *Вказівка.* Середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма. **3.46.** $\sqrt{m^2+n^2+mn}$, $\sqrt{m^2+n^2-mn}$. **3.47.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{2}}$. **3.48.** 5 см. *Вказівка.* Доведіть, що в даній трапеції середини діагоналей і основ є вершинами прямокутника. **3.49.** 8 см. *Вказівка.* Проведіть через вершину B пряму, яка паралельна стороні CD, і розгляньте трикутник, який при цьому утворився. **3.50.** $\frac{13}{20}$. **3.51.** 120°. *Вказівка.* Через вершину C проведіть пряму, паралельну діагоналі BD. **3.52.** $\sqrt{a^2+c^2+ac}$ або $\sqrt{a^2+c^2-ac}$. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\triangle C_1BA_1 \sim \triangle ABC$ з коефіцієнтом подібності, рівним $|\cos B|$. **3.53.** 25 см. *Вказівка.* Використовуючи теорему про бісектрису, покажіть, що $DC : CE = 5 : 1$. Застосуйте теорему косинусів до трикутника ABE. **3.54.** *Вказівка.* Доведіть, що косинус кута між діагоналями чотирикутника дорівнює 0. **3.55.** *Вказівка.* Нехай діагоналі паралелограма дорівнюють d_1 і d_2. Маємо: $b^2=\frac{d_1^2}{4}+\frac{d_2^2}{4}-\frac{d_1d_2}{2}\cos\alpha$, $a^2=\frac{d_1^2}{4}+\frac{d_2^2}{4}+\frac{d_1d_2}{2}\cos\alpha$. Звідси $\cos\alpha=\frac{a^2-b^2}{d_1d_2}$. Скористайтеся тим, що $d_1d_2\leqslant\frac{d_1^2+d_2^2}{2}$. **3.56.** *Вказівка.* На даному діаметрі оберіть точку M_1 таку, що $OM_1 = OM$. Нехай хорда CD паралельна діаметру. Тоді $CM^2 + DM^2 = DM^2 + DM_1^2$. **3.57.** *Вказівка.* Нехай X — довільна точка даного чотирикутника $ABCD$. Тоді один з кутів AXB, BXC, CXD, DXA є не гострим. Нехай, наприклад, $\angle AXB \geqslant 90°$. Припустивши, що $XA \geqslant 5$ і $XB \geqslant 5$, покажіть, що $AB > 7$. **3.59.** $\sqrt{2}$. *Вказівка.* Очевидно, що при $x \leqslant 0$ найменше значення не може бути досягнуто. При $x > 0$ розгляньте трикутник AOB, у якого $\angle O = 90°$, $OA = OB = 1$. Побудуйте промінь OC так, що $\angle AOC = 60°$, $\angle BOC = 30°$. Нехай M — довільна точка променя OC, відмінна від точки O. Позначимо $OM = x$. Скористайтеся тим, що $MA + MB \geqslant AB$. **3.61.** *Вказівка.* Розгляньте відрізки OA,

OB і OC такі, що $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $\angle AOB = 60°$, $\angle BOC = 60°$. **3.62.** Існують. *Вказівка*. Виберіть точки A, B і C на одній прямій так, щоб $AB = \sqrt{2} - 1$, $AC = CB$. **4.9.** $2\sqrt{6}$ см. **4.10.** 6 см. **4.11.** $\frac{a \sin\beta}{\cos(\beta+\gamma)\sin\gamma}$. **4.12.** $\frac{m \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **4.13.** $\frac{c \sin\alpha \sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma \sin\varphi}$. **4.14.** $\frac{m \sin\alpha \sin\varphi}{\sin\beta \sin(\alpha+\beta)}$. **4.18.** *Вказівка*. Доведіть, що $\mathrm{tg}\, A = \mathrm{tg}\, B$. **4.19.** 9 см. **4.20.** $\frac{25}{3}$ см. **4.21.** 60° або 120°. **4.22.** $\frac{b \sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}$.

4.23. $\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45° + \frac{3\alpha}{4}\right)}$. **4.24.** $\frac{a\sin\alpha}{\sin\beta}$. *Вказівка*. Доведіть, що $CE = DE$.

4.25. $\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. *Вказівка*. На продовженні медіани AM за точку M позначте точку K таку, що $AM = MK$, та застосуйте теорему синусів до трикутника ACK. **4.26.** $\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$. **4.27.** $R\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **4.28.** *Вказівка*. Виразіть кути AHB, BHC і AHC через кути трикутника ABC. **4.29.** $\frac{25}{4}$ см. *Вказівка*. Скориставшись теоремою про бісектрису, знайдіть косинус кута при основі рівнобедреного трикутника. **4.32.** $2\sqrt{\frac{34}{15}}$ см. *Вказівка*. Застосувавши теорему косинусів до трикутників MNP і MQP, знайдіть косинус кута PMQ. **4.33.** $\frac{14\sqrt{3}}{3}$. *Вказівка*. Якщо M_1 і M_2 — основи перпендикулярів, то навколо чотирикутника MM_1AM_2 можна описати коло. **4.34.** Коло радіуса $\frac{a}{\sin\alpha}$ з центром у точці перетину даних прямих. **4.36.** AM — це діаметр. *Вказівка*. Точки A, N, M, K лежать на одному колі. **4.37.** 6 см. *Вказівка*. Покажіть, що $\angle BOC = 150°$. Доведіть, що відрізок OM є діаметром описаного кола трикутника BOC. **4.38.** 6 см або $2\sqrt{3}$ см. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $DC = DJ = DB$. **4.39.** *Вказівка*. Доведіть, що $\sin\angle ACD = \sin\angle ACB$. **4.40.** *Вказівка*. $AE = 2O_1A \cdot \sin 45°$,

$AE = 2O_2A \cdot \sin 45°$. Звідси $AO_1 = AO_2$. **4.41.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.

Вказівка. Позначте на колі таку точку M, що $\cup DM = \cup DC + \cup AB$ (див. рисунок). Тоді $CM = a$, $\angle DCM = 180° - \alpha$. **4.42.** *Вказівка.* $\frac{BM}{\sin\angle BCM} = \frac{CM}{\sin\angle CBM} = \frac{DN}{\sin\angle DCN} = \frac{CN}{\sin\angle CDN}$. Далі скористайтеся тим, що $\sin\angle CBM = \sin\angle ABC = \sin\angle ADC = \sin\angle CDN$. **5.12.** 107°, 73°, 132°, 48°. *Вказівка.* Проведіть через одну з вершин верхньої основи пряму, паралельну бічній стороні трапеції, і розгляньте трикутник, який при цьому утворився. **6.2.** 1) 60° або 120°; 2) 90°. **6.3.** 30° або 150°. **6.6.** 12 см. **6.7.** 24 см. **6.8.** 1) $\frac{3}{2}$ см, $\frac{25}{8}$ см; 2) 8 см, $\frac{145}{8}$ см. **6.9.** 2 см,

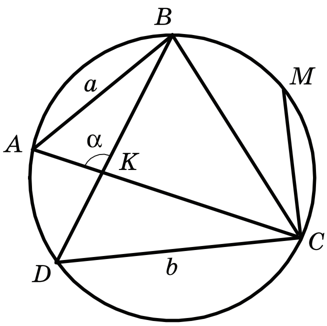

Рис. до задачі 4.41

$\frac{145}{8}$ см. **6.14.** $\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$. **6.15.** $\frac{b^2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}$. **6.16.** $\frac{h_1h_2}{2\sin\alpha}$.

6.17. $\frac{h^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$. **6.18.** 51 см^2, 75 см^2, 84 см^2. **6.19.** $\frac{24}{7}$ см. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$. **6.20.** 360 см^2. *Вказівка.* Проведіть через один з кінців верхньої основи трапеції пряму, яка паралельна бічній стороні трапеції, і знайдіть висоту трикутника, який ця пряма відтинає від трапеції. **6.21.** $12\sqrt{5}$ см^2. *Вказівка.* Нехай $ABCD$ — дана трапеція, $BC \parallel AD$. Проведіть через вершину C пряму, яка паралельна прямій BD і перетинає пряму AD у точці E. Доведіть, що трикутник ACE і дана трапеція рівновеликі. **6.22.** 19,5 см. **6.24.** 13 см, 14 см, 15 см. **6.25.** 36 см^2. **6.26.** 13 см, 15 см. *Вказівка.* Нехай точки дотику вписаного кола ділять одну з невідомих сторін на відрізки 6 см і x см, а другу — на відрізки 8 см і x см. Виразіть площу трикутника двома способами: за допомогою формули Герона і через радіус вписаного кола. **6.27.** *Вказівка.* Скористайтеся формулою для знаходження радіуса зовнівписаного кола і формулою Герона. **6.28.** *Вказівка.* Виразіть висоти через площу трикутника і відповідні сторони. **6.32.** *Вказівка.* Нехай відрізок AK — бісек-

ДОДАТОК 1

Зміст програми з ГЕОМЕТРІЇ (9 клас) для класів з поглибленим вивченням математики

Затверджено Міністерством освіти і науки України
(лист № 1/11-2151 від 30.05.2008 р.)

Структура програми

Програма подана у формі таблиці, яка містить дві частини: зміст навчального матеріалу і вимоги до підготовки учнів.

У частині «Зміст навчального матеріалу», яка оформлена прямим шрифтом, включено зміст програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Текст, оформлений курсивом, містить навчальний матеріал, який вивчається у класах з поглибленим рівнем математики.

Програма передбачає можливість вивчення змісту курсу з різним степенем повноти. Додаткові питання і теми, узяті в квадратні дужки, можна не вивчати, що дозволяє вчителеві залежно від конкретних умов варіювати об'єм матеріалу, який вивчається, і відповідно ступінь поглиблення і розширення курсу.

9–й клас. Геометрія

(105 год. I семестр — 48 год, 3 год на тиждень,
II семестр — 57 год, 3 год на тиждень)

К-ть год.	Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня підготовки учнів
6	Тема 1. **ПОВТОРЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ 8 КЛАСУ**	
16	Тема 2. **РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ**	
	Синус, косинус, тангенс *і котангенс* як функції кута від 0° до 180°. Співвідношення між основними тригонометричними функціями: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\text{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Тотожності $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\text{tg}(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$, $\text{ctg}(180° - \alpha) = -\text{ctg}\,\alpha$. Теореми косинусів і синусів. *Властивість сторін і діагоналей паралелограма.* *Формула для знаходження довжини медіани через сторони трикутника.* *Застосування формули $a = 2R\sin\alpha$*	**Формулює** означення: синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута від 0° до 180°; теореми: синусів, косинусів, про сторони і діагоналі паралелограма. **Записує** співвідношення між тригонометричними функціями. **Доводить** теореми: синусів, косинусів, про сторони і діагоналі паралелограма; формули: для обчислення радіуса описаного кола трикутника, для обчислення площі трикутника і чотирикутника. **Володіє** алгоритмами розв'язування трикутників. **Застосовує** вивчені теореми для розв'язування задач.

К-ть год.	Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня підготовки учнів
	Розв'язування трикутників. [*Тригонометрична форма теореми Чеви. Формула Ейлера для знаходження відстані між центрами вписаного і описаного кіл трикутника*.] Формули для знаходження площі трикутника. Формула для знаходження площі чотирикутника через його діагоналі та кут між ними.	
8	Тема 3. **ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ**	
	Правильні многокутники та їх властивості. Формули радіусів вписаних і описаних кіл правильних многокутників. Побудова правильних многокутників. Довжина кола. Довжина дуги кола. Площа круга та його частин.	**Формулює** означення: правильного многокутника, кругового сектора, кругового сегмента; теореми: про відношення довжини кола до його діаметра, про довжину кола, про площу круга і його частин. **Доводить** формули для обчислення радіусів вписаного і описаного кіл правильного многокутника. **Будує** правильний шестикутник. **Застосовує** вивчені означення і теореми для розв'язування задач.
18	Тема 4. **ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ**	
	Прямокутна система координат на площині. Формула відстані між точками із заданими координатами. *Поділ відрізка в заданому відношенні*. Координати середини відрізка. Рівняння фігури. Загальне рівняння прямої. *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Формула відстані від точки до прямої.* Рівняння кола. *Взаємне розміщення прямої і кола.* *Метод координат.* [*Коло Аполлонія. Формула Лейбніца*.]	**Описує** прямокутну систему координат. **Формулює** означення рівняння фігури, умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. **Записує** формули: відстані між двома точками, координат середини відрізка, координат точки поділу відрізка в даному відношенні, відстані від точки до прямої; рівняння кола, загальне рівняння прямої, рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки. **Доводить** формули: відстані між двома точками, координат середини відрізка; умову паралельності двох прямих. **Виводить:** загальне рівняння прямої, рівняння кола. **Застосовує** вивчені означення і теореми для розв'язування задач.

К-ть год.	Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня підготовки учнів
19	**Тема 5. ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ**	
	Скалярні й векторні величини. Поняття вектора. Модуль і напрям вектора. Рівні вектори. Протилежні вектори. Координати вектора. Додавання і віднімання векторів. Множення вектора на число. Колінеарні вектори. *Розкладання вектора за двома неколінеарними векторами*. Скалярний добуток векторів і його властивості. *Застосування векторів до розв'язування задач і доведення теорем*.	**Описує** поняття вектора. **Формулює** означення понять: модуль вектора, колінеарні вектори, рівні вектори, протилежні вектори, координати вектора, сума і різниця двох векторів, добуток вектора і числа, скалярний добуток двох векторів; властивості дій над векторами; теорему про розкладання вектора за двома неколінеарними векторами. **Доводить** формули для обчислення: координат вектора, який є результатом дій над векторами, скалярного добутку двох векторів, заданих координатами. **Застосовує** вивчені означення і теореми для розв'язування задач.
20	Тема 6. **ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ**	
	Поняття про перетворення фігури. Рух (переміщення) фігури і його властивості. Рівність фігур. [*Композиція рухів*.] Паралельне перенесення. Симетрії відносно точки та прямої. Поворот. *Застосування рухів фігури для розв'язування задач*. Гомотетія та її властивості. Перетворення подібності та його властивості. Площі подібних фігур. *Застосування перетворень подібності та гомотетії для розв'язування задач*. [*Інверсія. Застосування інверсії для розв'язування задач*.]	**Описує** поняття перетворення. **Формулює** означення понять: рух, паралельне перенесення, осьова і центральна симетрії, поворот, гомотетія, перетворення подібності, рівні фігури; властивості: руху, гомотетії, перетворення подібності, площ подібних фігур. **Доводить**, що паралельне перенесення, симетрії відносно прямої й точки, поворот є рухами. **Задає** паралельне перенесення за допомогою координат. **Застосовує** вивчені означення і теореми для розв'язування задач.
8	**Тема 7. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ З СТЕРЕОМЕТРІЇ**	
	Взаємне розташування прямих у просторі. Взаємне розташування площин. Взаємне розташування прямої та площини. Перпендикуляр до площини.	**Описує** взаємне розміщення в просторі двох прямих; прямої та площини; двох площин. **Пояснює**, що таке: пряма призма, піраміда, циліндр,

К-ть год.	Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня підготовки учнів
	Пряма призма. Піраміда. Площа поверхні та об'єм призми і піраміди. Циліндр. Конус. Куля. Площі поверхонь і об'єми циліндра, конуса і кулі. Розв'язування задач на обчислення площ поверхонь і об'ємів, у тому числі прикладного характеру.	конус, куля та їх елементи; поверхня і об'єм многогранника і тіла обертання. **Зображує і знаходить** на рисунках многогранники і тіла обертання та їх елементи. **Записує і пояснює** формули для обчислення площ поверхонь і об'ємів зазначених у програмі геометричних тіл. **Застосовує** вивчені означення і властивості до розв'язання задач, у т.ч. прикладного змісту.
10	Тема 8. **ПОВТОРЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ**	

ДОДАТОК 2

Орієнтовне календарне планування з геометрії (9 клас) для класів з поглибленим вивченням математики

№	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин
	Тема 1. Повторення і систематизація навчального матеріалу з курсу геометрії 8 класу (6 год)	
1	Повторення й систематизація навчального матеріалу	5
2	Контрольна робота № 1	1
	Тема 2. Розв'язування трикутників (16 год)	
3	Синус, косинус і тангенс кута від 0° до 180°	2
4	Теорема косинусів	3
5	Теорема синусів	3
6	Розв'язування трикутників	3
7	Формули для знаходження площі трикутника	4
8	Контрольна робота № 2	1
	Тема 3. Правильні многокутники (8 год)	
9	Правильні многокутники	4
10	Довжина кола. Площа круга	3
11	Контрольна робота № 3	1

№	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин
	Тема 4. Декартові координати на площині (18 год)	
12	Відстань між двома точками із заданими координатами. Поділ відрізка в заданому відношенні	3
13	Рівняння фігури. Рівняння кола	3
14	Контрольна робота № 4	1
15	Загальне рівняння прямої	3
16	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки	4
17	Використання декартових координат для розв'язування геометричних задач	3
18	Контрольна робота № 5	1
	Тема 5. Вектори на площині (19 год)	
19	Поняття вектора	3
20	Координати вектора	2
21	Додавання і віднімання векторів	3
22	Контрольна робота № 6	1
23	Множення вектора на число. Застосування векторів до розв'язування задач	5
24	Скалярний добуток векторів	4
25	Контрольна робота № 7	1
	Тема 6. Геометричні перетворення (20 год)	
26	Перетворення (відображення) фігур	2
27	Рух. Паралельне перенесення	2
28	Осьова симетрія	3
29	Центральна симетрія	3
30	Контрольна робота № 8	1
31	Поворот	4
32	Гомотетія. Подібність фігур	4
33	Контрольна робота № 9	1
	Тема 7. Початкові відомості з стереометрії (8 год)	
34	Прямі й площини у просторі	3
35	Пряма призма. Піраміда	2
36	Циліндр. Конус. Куля	2
37	Контрольна робота № 10	1
	Тема 8. Повторення і систематизація навчального матеріалу (15 год)	
38	Повторення навчального матеріалу	14
39	Контрольна робота № 11	1

ДОДАТОК 3

Таблиця значень тригонометричних функцій

Величина кута (у градусах)	Синус	Косинус	Тангенс	Величина кута (у градусах)	Синус	Косинус	Тангенс
0	0,000	1,000	0,000	46	0,719	0,695	1,036
1	0,017	1,000	0,017	47	0,731	0,682	1,072
2	0,035	0,999	0,035	48	0,743	0,669	1,111
3	0,052	0,999	0,052	49	0,755	0,656	1,150
4	0,070	0,998	0,070	50	0,766	0,643	1,192
5	0,087	0,996	0,087	51	0,777	0,629	1,235
6	0,105	0,995	0,105	52	0,788	0,616	1,280
7	0,122	0,993	0,123	53	0,799	0,602	1,327
8	0,139	0,990	0,141	54	0,809	0,588	1,376
9	0,156	0,988	0,158	55	0,819	0,574	1,428
10	0,174	0,985	0,176	56	0,829	0,559	1,483
11	0,191	0,982	0,194	57	0,839	0,545	1,540
12	0,208	0,978	0,213	58	0,848	0,530	1,600
13	0,225	0,974	0,231	59	0,857	0,515	1,664
14	0,242	0,970	0,249	60	0,866	0,500	1,732
15	0,259	0,966	0,268	61	0,875	0,485	1,804
16	0,276	0,961	0,287	62	0,883	0,469	1,881
17	0,292	0,956	0,306	63	0,891	0,454	1,963
18	0,309	0,951	0,335	64	0,899	0,438	2,050
19	0,326	0,946	0,344	65	0,906	0,423	2,145
20	0,342	0,940	0,364	66	0,914	0,407	2,246
21	0,358	0,934	0,384	67	0,921	0,391	2,356
22	0,375	0,927	0,404	68	0,927	0,375	2,475
23	0,391	0,921	0,424	69	0,934	0,358	2,605
24	0,407	0,914	0,445	70	0,940	0,342	2,747
25	0,423	0,906	0,466	71	0,946	0,326	2,904
26	0,438	0,899	0,488	72	0,951	0,309	3,078
27	0,454	0,891	0,510	73	0,956	0,292	3,271
28	0,469	0,883	0,532	74	0,961	0,276	3,487
29	0,485	0,875	0,554	75	0,966	0,259	3,732
30	0,500	0,866	0,577	76	0,970	0,242	4,011
31	0,515	0,857	0,601	77	0,974	0,225	4,331
32	0,530	0,848	0,625	78	0,978	0,208	4,705
33	0,545	0,839	0,649	79	0,982	0,191	5,145
34	0,559	0,829	0,675	80	0,985	0,174	5,671
35	0,574	0,819	0,700	81	0,988	0,156	6,314
36	0,588	0,809	0,727	82	0,990	0,139	7,115
37	0,602	0,799	0,754	83	0,993	0,122	8,144
38	0,616	0,788	0,781	84	0,995	0,105	9,514
39	0,629	0,777	0,810	85	0,996	0,087	11,430
40	0,643	0,766	0,839	86	0,998	0,070	14,301
41	0,656	0,755	0,869	87	0,999	0,052	19,081
42	0,669	0,743	0,900	88	0,999	0,035	28,636
43	0,682	0,731	0,933	89	1,000	0,017	57,290
44	0,695	0,719	0,966	90	1,000	0,000	
45	0,707	0,707	1,000				

ЗМІСТ

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 9 класу
з поглибленим вивченням математики

Редактор *Г. Ф. Висоцька*
Художник *С. Е. Кулинич*
Комп'ютерна верстка *О. О. Удалов*
Коректор *Т. Є. Цента*

Підписано до друку 21.07.2009. Формат 60×90/16.
Гарнітура шкільна. Папір офсетний. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 17,00.
Тираж 5000 прим. Замовлення №

Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001 р.

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 758-83-93, 719-17-26, факс: (057) 719-17-26

Віддруковано з готових діапозитивів
у друкарні ПП «Модем»,
Тел. (057) 758-15-80